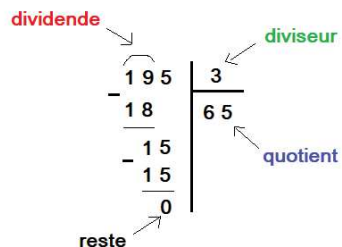


ARITHMETIQUE

I. Divisibilité

Rappel : Division euclidienne



Lorsque le reste est égal à 0, on dit que 195 est **divisible** par 3.

ATTENTION : Dans une division euclidienne, le résultat est un nombre **entier**.

Exemple : 30 est divisible par 2.

1) Rappels : Les critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible :

- par 2, si son chiffre des unités est pair,
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5,
- par 10, si son chiffre des unités est 0,
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3,
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemple :

1071 est divisible par 3 et 9
Car $1+0+7+1=9$. Et 9 est divisible par 3 et par 9.

2) Nombres premiers

Définition : Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemples :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... En effet, 13 n'est divisible que par 1 et 13.

Remarque :

Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

3) Nombres premiers entre eux

Exemples :

a) Tous les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Tous les diviseurs de 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

Les diviseurs communs à 60 et 100 sont donc : 1, 2, 4, 5, 10, 20

b) Tous les diviseurs de 20 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20

Tous les diviseurs de 63 sont : 1, 3, 7, 9, 21, 63

Le seul diviseur commun à 20 et 63 est : 1

On dit dans ce cas que 20 et 63 sont premiers entre eux.

Définition : On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est 1.

II . Application aux fractions

1) Décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers

Exemples :

- $20 = 2 \times 2 \times 5$ est une décomposition du nombre 20 en produits de facteurs premiers.

En effet, **chaque facteur** de la décomposition est un **nombre premier**.

- $231 = 3 \times 7 \times 11$

- $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

Propriété :

Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Méthode : Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers

Exemple : Décomposer 300 en produits de facteurs premiers.

Pour le faire, il est important de bien connaître le début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

On commence par tester si **300** est **divisible par 2** (1^{er} nombre premier).

La réponse est « oui » car **300** se termine par un chiffre pair.

Et on a : **$300 : 2 = 150$**

$$\begin{array}{r} 300 \\ 150 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right.$$

On recommence, en testant si **150** est **divisible par 2**.

La réponse est « oui » et **$150 : 2 = 75$**

$$\begin{array}{r} 300 \\ 150 \\ 75 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$$

On recommence, en testant si **75** est divisible par 2.

La réponse est « non » !

On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.

Est-ce que **75** est **divisible par 3**.

La réponse est « oui » car $7+5=12$ est divisible par 3.

$$\begin{array}{r} 300 \\ 150 \\ 75 \\ 25 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right.$$

Et on a : **$75 : 3 = 25$**

On recommence, en testant si **25** est divisible par 3.

La réponse est « non » !

On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.

Est-ce que **25** est **divisible par 5**.

La réponse est « oui » et on a **$25 : 5 = 5$** .

$$\begin{array}{r} 300 \\ 150 \\ 75 \\ 25 \\ 5 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{array} \right.$$

On recommence, en testant si **5** est **divisible par 5**.

La réponse est « oui » et on a **$5 : 5 = 1$** .

C'est fini, on trouve **1** !

$$\begin{array}{r} 300 \\ 150 \\ 75 \\ 25 \\ 5 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{array} \right.$$

La décomposition en facteurs premiers de 300 se lit dans la colonne de droite.

Ainsi, **$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$**

2) Fraction irréductible

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple : Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On a ainsi les décompositions de 60 et 126 : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

$$\text{On a : } \frac{60}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

10 et 21 sont premiers entre eux et donc :

$$\frac{10}{21} \text{ est la fraction irréductible égale à } \frac{60}{126}$$