Exercice corrigé

Rends la fraction $\frac{280}{448}$ irréductible.

Correction

On commence par décomposer 280 et 448 en produit de facteurs premiers.

$280 = 2^3 \times 7 \times 5$ et $448 = 2^6 \times 7$

$\frac{280}{448} = \frac{2^3 \times 5 \times 7}{2^6 \times 7} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$ **qui est irréductible car 5 et 8 n'ont que 1 comme diviseur commun.**

1 Les fractions sont-elles simplifiables ? Justifie.

a.	b.	c.	d.	e.
$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{1}{82}$	$\frac{42}{39}$

a. Oui, car le numérateur et le dénominateur sont pairs et donc divisibles par 2,

b. Non, car le numérateur et le dénominateur sont tous les deux premiers et 19 n'est pas un multiple de 3.

c. Oui, car le numérateur et le dénominateur se terminent par 0 et 5 et sontdonc divisibles par 5,

d. Non, car le numérateur n'est divisible que par 1.

e. Non car le numérateur et le dénominateur n'ont pas d'autre diviseur commun que 1..

2 Simplifie chaque fraction en utilisant les critères de divisibilité.

a. $\frac{385}{165} = \frac{5 \times 77}{5 \times 33} = \frac{77}{33} = \frac{11 \times 7}{11 \times 3} = \frac{7}{3}$

b. $\frac{153}{189} = \frac{9 \times 17}{9 \times 21} = \frac{17}{21}$

c. $\frac{120}{90} = \frac{10 \times 12}{10 \times 9} = \frac{12}{9} = \frac{3 \times 4}{3 \times 3} = \frac{4}{3}$

3 Simplifie pour obtenir une fraction irréductible.

a. $\frac{4 \times 15 \times 14}{21 \times 10 \times 22} = \frac{2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 2}{7 \times 3 \times 5 \times 2 \times 2 \times 11} = \frac{2}{11}$

b. $\frac{2^2 \times 3 \times 5^3}{2 \times 3^3 \times 5^2} = \frac{2 \times 5}{3^2} = \frac{10}{9}$

4 **Avec un diviseur commun**

a. Sachant que 225 et 375 sont divisibles par 75, rends la fraction $\frac{225}{375}$ irréductible.

$\frac{225}{375} = \frac{75 \times 3}{75 \times 5} = \frac{3}{5}$

b. Sachant que 1 139 et **1 407** sont divisibles par 67, rends la fraction $\frac{2\,278}{2\,814}$ irréductible.

$\frac{2278}{2814} = \frac{2 \times 1139}{2 \times 1407} = \frac{67 \times 17}{67 \times 21} = \frac{17}{21}$

5 **En décomposant**

a. Écris 504 et 540 sous forme de produits de facteurs premiers.

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

b. Rends alors la fraction $\frac{504}{540}$ irréductible.

$\frac{504}{540} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 7}{2^2 \times 3^3 \times 5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$

6 Rends la fraction $\frac{1\,204}{258}$ irréductible en effectuant une seule simplification et en détaillant les calculs.

On remarque (avec un peu de persévérance tout de même) que $1204 = 86 \times 14$ et $258 = 86 \times 3$

$\frac{1204}{258} = \frac{86 \times 14}{86 \times 3} = \frac{14}{3}$

7 La fraction $\frac{274}{547}$ est-elle irréductible ? Justifie.

Oui, car 547 est un nombre premier, on ne peut donc pas trouver de diviseur commun autre que 1 à 547 et 274.

Série 3 Rendre une fraction irréductible

8 Voici la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres 1 080 et 288 :

$$1\,080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \text{ et } 288 = 2^5 \times 3^2.$$

a. Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ?

5 n'apparaît pas dans la décomposition en facteurs premiers de 288, mais 2 et 3 oui. Je choisis le plus petit exposant pour chacun : $2^3 \times 3^2$

C'est 72 le plus grand diviseur commun.

b. Simplifie la fraction $\frac{1\,080}{288}$ pour la rendre irréductible.

$$\frac{1\ 080}{288} = \frac{2^3\times3^3\times5}{2^5\times3^2} = \frac{2^3\times3^2\times3\times5}{2^3\times3^2\times2^2} = \frac{3\times5}{2^2} = \frac{15}{4}$$

c. Complète les décompositions en produits de facteurs premiers des nombres 3 528 et 6 174 :

3 528 = $2^3\times3^2\times7^2$

6 174 = $2\times3^2\times7^3$

d. Simplifie la fraction $\frac{3\,528}{6\,174}$ pour la rendre irréductible.

$$\frac{3\ 528}{6\ 174} = \frac{2^3\times3^2\times7^2}{2\times3^2\times7^3} = \frac{2^2}{7} = \frac{4}{7}$$

e. Décompose 1 430 et 6 383 en produits de facteurs premiers

1 430 = $2\times5\times11\times13$

6 383 = 13×491

f. La fraction $\frac{1\ 480}{6\ 383}$ est-elle irréductible ?

Non car les deux nombres sont divisibles par 13

9 On peut démontrer que $\sqrt{2}$ ne peut pas être écrit sous la forme d'une fraction. On peut cependant trouver des fractions qui approchent $\sqrt{2}$ avec une bonne précision.

Une technique pour obtenir certaines de ces fractions consiste à les construire de la façon suivante.

On part de $\frac{3}{2}$ et on construit la fraction $\frac{N+2D}{N+D}$

a. En utilisant cette technique, complète le tableau suivant :

N	D	N + 2D	N + D	Fraction obtenue
1	1	3	2	$\frac{3}{2}$
3	2	7	5	$\frac{7}{5}$
7	5	17	12	$\frac{17}{12}$
17	12	41	29	$\frac{41}{29}$
41	29	99	70	$\frac{99}{70}$
99	70	239	169	$\frac{239}{169}$
239	169	577	408	$\frac{577}{408}$
577	408	1393	985	$\frac{1393}{985}$
1393	895	3363	2378	$\frac{3363}{2378}$

b. Prouve que la dernière fraction obtenue est irréductible.

3363 = $3\times19\times59$ et 2378= $2\times29\times41$ La fraction est donc irréductible

c. Avec une calculatrice détermine l'écart de valeur entre la dernière fraction obtenue et $\sqrt{2}$. Obtient-on une bonne approximation de $\sqrt{2}$?

En calculant $\frac{3363}{2378} - \sqrt{2}$ on obtient $6{,}25218 \times 10^{-8}$ soit environ un demi milliardième d'écart, c'est une bonne approximation.