Sujet 1 : L'addition du cancre

Le bon élève sait que, pour faire l'addition de deux fractions p/q et p'/q', il faut d'abord réduire ces fractions au même dénominateur. Le cancre, lui, se contente d'ajouter entre eux les numérateurs et les dénominateurs. Sans le savoir, il calcule ainsi une *médiante*.

Plus précisément, deux fractions irréductibles p/q et p'/q' étant données, leur médiante, notée $(p/q) \oplus (p'/q')$, est la fraction définie par :

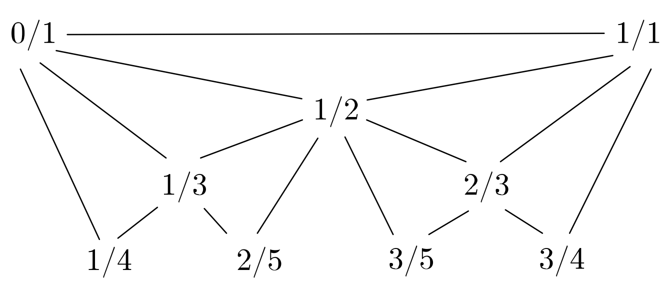
$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}.$$

Quelques questions à se poser parmi d'autres :

1. Pourquoi est-il important de supposer p/q et p'/q' irréductibles pour en calculer la médiante ? (Calculer par exemple $(2/3) \oplus (4/5)$ puis $(4/6) \oplus (4/5)$.)

2. Calculer $(1/6) \oplus (7/5)$, $(3/4) \oplus (4/5)$ et $(5/9) \oplus (5/8)$. Est-il vrai sur chacun de ces exemples que la valeur de la médiante est entre celle des deux fractions ? Ce résultat est-il vrai dans n'importe quel autre cas ?

3. Dans le diagramme suivant (*diagramme de Stern-Brocot*), on est parti des nombres 0 (écrit 0/1) et 1 (écrit 1/1) dont on a calculé la médiante (qui vaut 1/2), puis la médiante de 0/1 et de 1/2 (qui vaut 1/3) ainsi que celle de 1/2 et de 1 (qui vaut 2/3). Même chose pour la ligne suivante.



   Dessiner quelques lignes supplémentaires de ce diagramme. Combien y a-t-il de fractions sur chaque ligne ?

4. Calculer la différence entre les fractions à l'extrémité d'une arête du diagramme (par exemple $2/3-1/2$, ou $1/3-1/4\ldots$). Qu'observe-t-on ? Est-ce toujours vrai ?

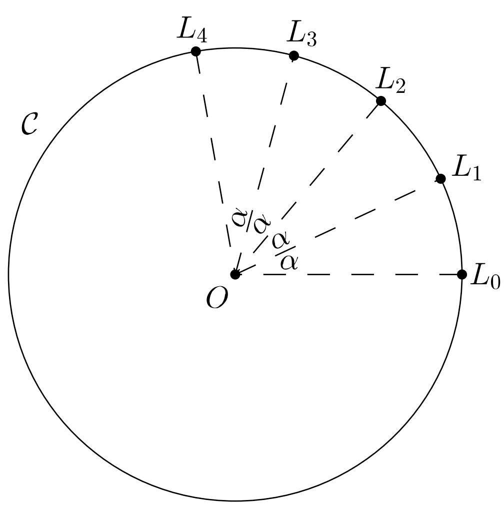
5. Refaire le diagramme à partir de 0 (toujours écrit 0/1) et de 2, que l'on écrira 2/1. Qu'observe-t-on ? Et si l'on part de 0 et de $3 = 3/1$? Comment pourrait-on écrire $+\infty$ pour que le diagramme aille de zéro à l'infini ?

6. Sur chaque ligne du diagramme de Stern-Brocot se trouve une fraction de numérateur maximal (éventuellement deux, au début). Écrire la liste des fractions ainsi obtenues. Comment passe-t-on de l'une de ces fractions à la suivante dans le diagramme ? Que remarque-t-on sur les dénominateurs ? Essayer de démontrer ces observations.

7. Faire la somme des numérateurs sur chaque ligne du diagramme de Stern-Brocot. Que remarque-t-on ? Essayer de le démontrer. Même question pour les dénominateurs.

Sujet 2 : Lucie la puce

Un terrain de sport a la forme d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. À l'instant 0, Lucie la puce se trouve au point L_0 de $\mathcal{C}$. Chaque seconde, Lucie saute sur un autre point du cercle, décrivant successivement les points L_1, L_2, L_3, etc. Lucie met toujours la même force dans chaque saut et saute toujours dans le même sens, si bien que l'angle α fait par deux points consécutifs avec le centre O de $\mathcal{C}$ est toujours le même.



Quelques questions à se poser parmi d'autres :

1. Étudier la suite des points atteints par Lucie pour les valeurs suivantes de α : $\alpha = 90°$; $\alpha = 120°$; $\alpha = 180°$; $\alpha = 72°$; $\alpha = 144°$.

2. Déterminer un angle α qui permet à Lucie de visiter en tout et pour tout 9 points différents sur $\mathcal{C}$.

3. Quels sont les angles α qui permettent à Lucie de visiter exactement ces 9 points (mais pas forcément « dans l'ordre ») ?

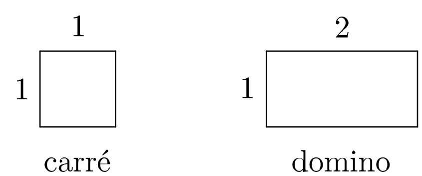
4. On pose $\alpha = p/q$ (mesuré en degrés), où p/q est une fraction irréductible. Combien de points différents Lucie va-t-elle visiter ?

5. Trouver deux angles $\alpha = p/q$ et $\alpha' = p'/q'$ tels que les points visités par Lucie selon l'angle α soient tous différents de ceux visités selon l'angle α' (en-dehors de L_0).

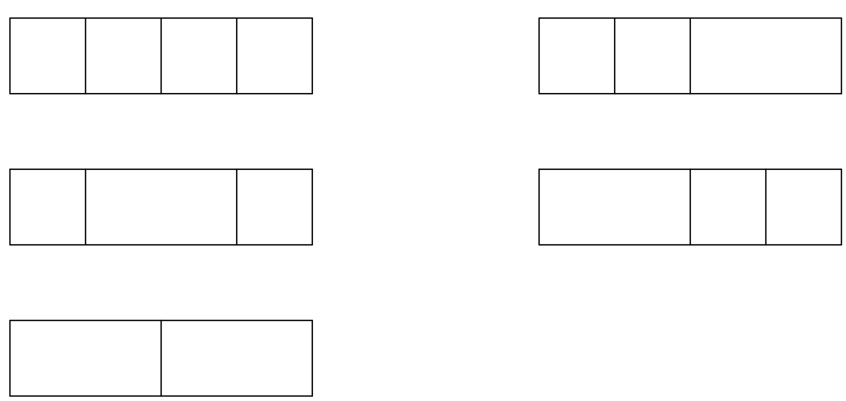
6. Existe-t-il un angle α pour lequel Lucie ne reviendra jamais à son point de départ ?

Sujet 3 : Chaînes de dominos

On dispose de deux types de pièces : des carrés (de côté 1) et des dominos (rectangles de côtés 1 et 2). Le nombre de chacune de ces pièces est illimité.



On souhaite recouvrir une bande d'épaisseur 1 et de largeur entière fixée à l'aide de ces pièces. Il y a bien sûr plusieurs manières de faire. Par exemple, pour une bande de largeur 4, il y a 5 solutions.



Quelques questions à se poser, entre autres :

1. Trouver toutes les solutions possibles pour une bande de largeur 1, 2, jusqu'à 7.
2. Proposer une règle de formation qui donne le nombre de solutions selon la taille de la bande, puis démontrer que cette règle est toujours valide.
3. Reprendre l'exercice avec des carrés et des dominos de longueur 3 (et non plus de longueur 2).
4. Et avec des dominos de longueur 2 et des dominos de longueur 3 (sans carré) ?
5. Et avec des dominos de toutes les longueurs (entières) que l'on veut ?