Autour des fonctions…

Préalable:

Questions de cours

Généralités sur les fonctions

1

- La formule de la dérivée d'une fonction de la forme $x \rightarrow \frac{U(x)}{V(x)}$ est:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2

- La formule de la dérivée d'une fonction de la forme $x \to e^{U(x)}$ est:

$$(e^U)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3

- La formule de la dérivée d'une fonction de la forme $x \to \ln(U(x))$ est:

$$(\ln(U))' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4

- La formule de la dérivée d'une fonction de la forme $x \to (U \times V)(x)$ est:

$$(U \times V)' = \; \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

5

- La formule de la dérivée d'une fonction de la forme $x \to U^n(x)$, n entier non nul, est:

$$(U^n)' = \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

6

- L’équation de la tangente à la courbe d’une fonction f au point d’abscisse -2 est:

……………………………………..

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Pour déterminer les abscisses des points où la courbe de f touche l'axe des abscisses, il suffit de résoudre l'équation:

… … … … … … … … … … …. . .

8

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = -3$ et $f(5) = 4$.

Donner les conditions sur la fonction f pour qu'en appliquant le Théorème des valeurs intermédiaires (où ses corolaires), on puisse affirmer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur l'intervalle $[-1\,;5]$.

9

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3 - e^{x} - x$$

Justifiez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

10

On admet que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - e^{x} - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Justifiez que l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$, appartient à l'intervalle $]0\,;1[$ et déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

11

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - e^{x} - x$

On a vu que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α qui appartient à l'intervalle]0 ; 1[.

- Décrire sommairement , en quoi consisterait le principe de dichotomie pour déterminer un encadrement de cette solution.

Correction de 1 à 11

1

- La formule de la **dérivée** d'une fonction de la forme $x \to \dfrac{U(x)}{V(x)}$ est:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Attention! Erreur courante! Pensez aux parenthèses parfois indispensables autour de UV' lors de l'utilisation car il est précédé du signe $-$.

2

- La formule de la dérivée d'une fonction de la forme $e^{U(x)}$ est:

$$\left(e^{U}\right)' = U' \times e^{U}$$

On en déduit que:

Une primitive d'une fonction de la forme $U' \times e^{U}$ est e^{U}.

3

- La formule de la dérivée d'une fonction de la forme $x \to \ln(U(x))$ est:

$$\left(\ln(U)\right)' = \frac{U'}{U}$$

On en déduit que:

Une primitive d'une fonction de la forme $\frac{U'}{U}$ est $\ln(U)$.

4

- La formule de la dérivée d’une fonction de la forme $x \rightarrow (U \times V)(x)$ est:

$$(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V})' = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{V} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{V}'$$

5

- La formule de la dérivée d'une fonction de la forme $x \to U^n(x)$, n entier non nul, est:

$$(U^n)' = nU^{n-1} \times U'$$

6

- L'équation de la tangente à la courbe d'une fonction f dérivable, au point d'abscisse -2 est:

$$\boldsymbol{y = f'(-2)\big(x - (-2)\big) + f(-2)}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)}$$

7

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Pour déterminer les abscisses des points où la courbe de f touche l'axe des abscisses, il suffit de résoudre l'équation:

$$\boldsymbol{f(x) = 0}$$

8

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = -3$ et $f(5) = 4$.

Donner les conditions sur la fonction f pour qu'en appliquant le Théorème des valeurs intermédiaires (où ses corolaires), on puisse affirmer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur l'intervalle $[-1\,;5]$.

Sur l'intervalle $[-1\,;5]$, on doit avoir:

- f continue.
- f strictement monotone (ici strictement croissante car $f(-1) < f(5)$).
- 0 appartient à l'intervalle d'arrivée (ici $[-3\,;4]$ contient bien 0).

9

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - e^x - x$

Justifiez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

- f est **continue sur $\mathbb{R}$**
- On a $f'(x) = -e^x - 1 < 0$ sur $\mathbb{R}$, donc **f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.**
- Quand $x \to -\infty$
  $e^x \to 0$ et $-x \to +\infty$ donc par somme $f(x) \to +\infty$
  Quand $x \to +\infty$
  $-e^x \to -\infty$ et $-x \to -\infty$ donc par somme $f(x) \to -\infty$
  L'intervalle d'arrivée est donc $\mathbb{R}$ qui contient 0

D'après le **Théorème des valeurs intermédiaires**, on en déduit que **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$**.

10

On admet que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - e^x - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Justifiez que l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$, appartient à l'intervalle]0 ; 1[et déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

- $f(0) = 3 - e^0 - 0 = 3 - 1 = 2 > 0$
- $f(1) = 3 - e^1 - 1 = 2 - e \approx -0{,}72 < 0$

Le changement de signe a donc lieu entre 0 et 1 donc $\alpha \in]0\,;1[$

Par balayage avec la calculatrice, on obtient:

- $\alpha \in]0,7\,;0,8[$

X	Y1
0.6	0.5779
0.7	0.2862
0.8	-0.026
0.9	-0.36

, puis $\alpha \in]0,79\,;0,80[$

X	Y1
0.78	0.0385
0.79	0.0066
0.8	-0.026

Changement de signe

Changement de signe

11

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - e^x - x$

On a vu que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α qui appartient à l'intervalle $]0\,;1[$.

- Décrire sommairement , en quoi consisterait le principe de dichotomie pour déterminer un encadrement de cette solution.

On sait que $\alpha \in]a\,;b[=]0\,;1[$

- On calcule le milieu $m = \frac{a+b}{2}$ de $]a\,;b[$
- On détermine si la solution α est dans $]a\,;m[$ ou dans $]m\,;b[$.
- On recommence le processus en prenant comme nouvel intervalle $]a\,;b[$, l'intervalle sélectionné à l'étape précédente.
- On continue jusqu'à l'obtention d'un intervalle d'amplitude désirée.

Reprise des questions de cours

11

Compléter la phrase ci-dessous:

Dire pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle ouvert du type $]A\,;\,+\infty[$ contient…………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

12

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$$

Que peut on en déduire pour la courbe de f?

13

f est une fonction définie pour tout réel $x \neq 3$ et telle que :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

1. Que peut on en déduire pour la courbe de f?
2. Dessiner sommairement une allure de courbe possible au voisinage de 3.

14

f est une fonction définie et strictement décroissante sur $]-\infty\,;5[$, dont la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=7$ en $-\infty$ et une asymptote verticale d'équation $x=5$

Que peut on en déduire concernant les limites de f aux bornes de son domaine de définition?

Correction de 11 à 14

11

Compléter la phrase ci-dessous:

Dire pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle ouvert du type $]A\ ;\ +\infty[$ **contient toutes les valeurs de $f(x)$, pour x suffisamment grand**

12

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$$

Que peut on en déduire pour la courbe de f?

On peut en déduire que:

la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = -3$ en $+\infty$.

13

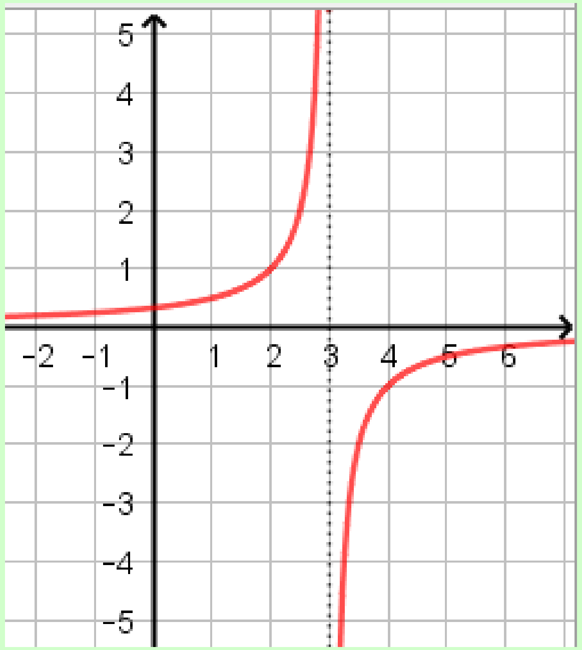
f est une fonction définie pour tout réel $x \neq 3$ et telle que :

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

1. Que peut on en déduire pour la courbe de f?
2. Dessiner sommairement une allure de courbe possible au voisinage de 3.

1. Ces deux limites indiquent que **la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$**

2. Voici une allure de courbe compatible avec ces limites
(c'est la courbe de $f(x) = -\frac{1}{x-3}$)



14

f est une fonction définie et strictement décroissante sur $]-\infty\,;5[$, dont la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 7$ en $-\infty$ et une asymptote verticale d'équation $x = 5$

Que peut on en déduire concernant les limites de f aux bornes de son domaine de définition?

- La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 7$ en $-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 7$

- La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$ donc $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = -\infty$

Car f définie sur $]-\infty\,;5[$

Car f strictement décroissante sur $]-\infty\,;5[$

Reprise des questions de cours

15

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
Associer les cases du tableau pour constituer deux familles

1	f est convexe sur I		**a**	La courbe de f est au dessus de ses tangentes sur I
2	La courbe de f est en dessous de ses tangentes sur I		**b**	la dérivée f' est strictement décroissante sur I
3	$f''(x) < 0$ sur I		**c**	f est concave sur I
4	la dérivée f' est strictement croissante sur I		**d**	f a la même convexité sur I que la fonction carré sur $\mathbb{R}$
5	f a la même convexité sur I que la fonction Ln sur $]0\ ;\ +\infty[$		**e**	$f''(x) > 0$ sur I

16

Dessiner la courbe possible d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-1\,;4\,]$ telle que:

- f décroissante sur $[-1\,;4\,]$
- f' décroissante sur $[-1\,;2\,]$
- $f''(2) = 0$
- $f''(x) > 0$ sur $]2\,;4\,]$

17

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

2. Justifier que pour tout x réel, $e^x \geq x + 1$

Correction de 15 à 17

15

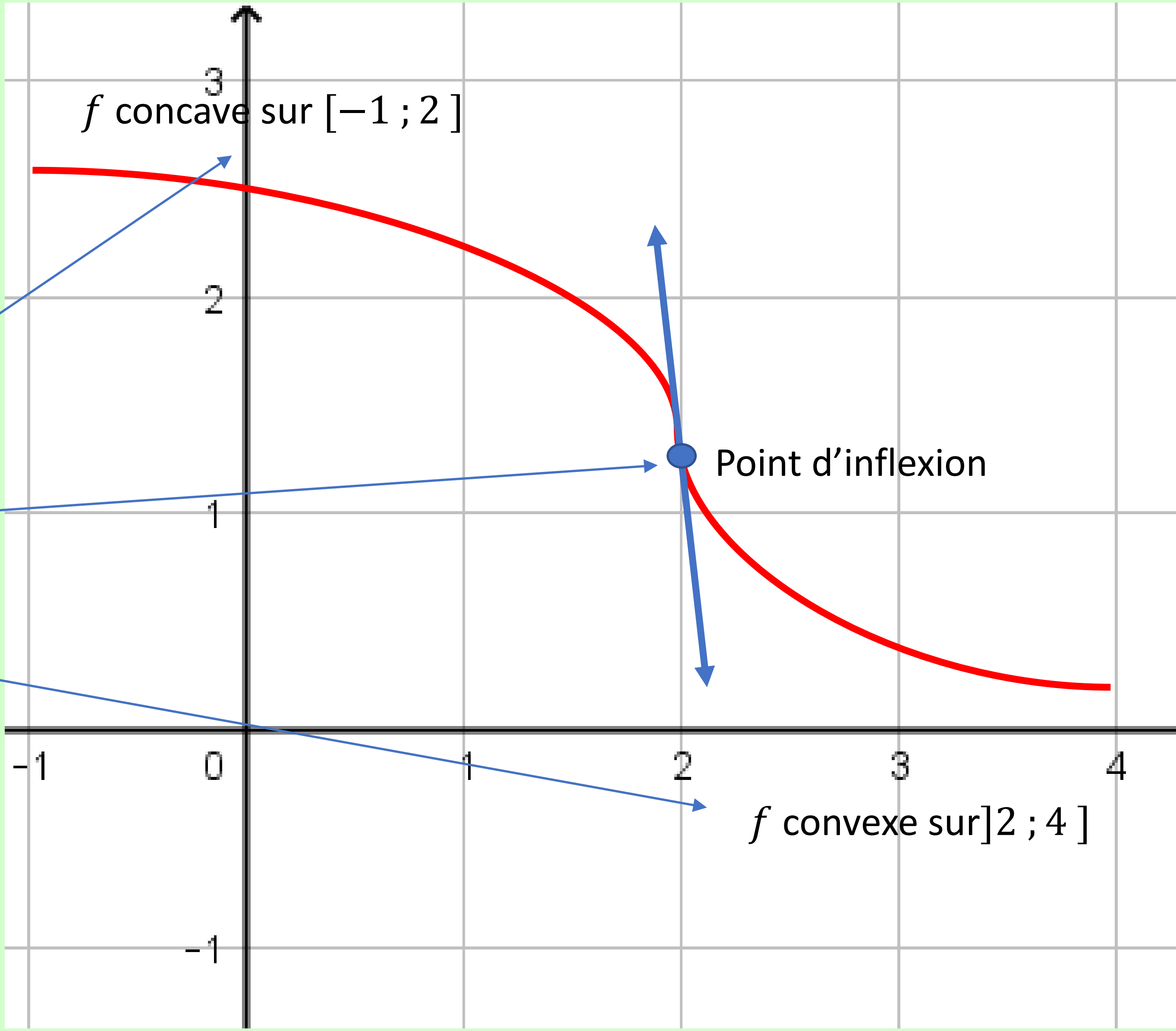
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
Associer les cases du tableau pour constituer deux familles

	Famille 1		**Famille 2**
1	f est convexe sur I	**c**	f est concave sur I
a	La courbe de f est au dessus de ses tangentes sur I	**2**	La courbe de f est en dessous de ses tangentes sur I
e	$f''(x) > 0$ sur I	**3**	$f''(x) < 0$ sur I
4	la dérivée f' est strictement croissante sur I	**b**	la dérivée f' est strictement décroissante sur I
d	f a la même convexité sur I que la fonction carré sur $\mathbb{R}$	**5**	f a la même convexité sur I que la fonction Ln sur $]0\ ;\ +\infty[$

16

Dessiner la courbe possible d'une fonction f sur $[-1\,;4\,]$ telle que:

- f décroissante sur $[-1\,;4\,]$
- f' décroissante sur $[-1\,;2\,]$
- $f''(2)=0$
- $f''(x)>0$ sur $]2\,;4\,]$



17

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.
2. Justifier que pour tout x réel, $e^x \geq x + 1$

1. l'équation de la tangente à la courbe de la fonction exp au point d'abscisse 0 est:
   $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or $(e^x)' = e^x$ donc $f'(0) = e^0 = 1$, et
   $f(0) = e^0 = 1$
   L'équation cherchée est donc $\boldsymbol{y = x + 1}$

2. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ (car $(e^x)'' = e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$).
   Sa représentation graphique est donc au dessus de ses tangentes sur $\mathbb{R}$, en particulier au dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = x + 1$
   (d'après 1°)
   On peut donc affirmer que pour tout $\boldsymbol{x}$ réel, $\boldsymbol{e^x \geq x + 1}$

Reprise des questions de cours

18

Déterminer une primitive de f définie par:

$$f(x) = 2x.$$

19

Déterminer une primitive de f définie par:

$$f(x) = 3x.$$

20

Déterminer une primitive de f définie par:

$$f(x) = 3e^{3x-7}.$$

21

Déterminer une primitive de f définie par:

$$f(x) = 4e^{3x-7}.$$

22

Déterminer une primitive de f définie par:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}.$$

23

Vrai ou faux?

Une solution de l’équation différentielle $y' = f(x)$ est une primitive de f.

24

Vrai ou Faux?

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{k}e^{-2x+1}$, k étant une constante réelle, est une solution de l'équation différentielle $y' = -2y$.

25

Vrai ou Faux?

Soit F, une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.

Le signe de f sur $\mathbb{R}$ donne les variations de F sur $\mathbb{R}$.

26

Vrai ou Faux?

Soit F (deux fois dérivable), une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.

Le signe de f sur $\mathbb{R}$ donne les variations de F'' sur $\mathbb{R}$.

Correction de 18 à 26

18

Déterminer une primitive de$f$ définie par: $f(x) = 2x$.

Une primitive de f est une fonction F telle que $F' = f$ (La dérivée de F est f)

Une primitive de $f(x) = 2x$ est de la forme:

$$\boldsymbol{F(x) = x^2 + Constante}$$

19

Déterminer une primitive de f définie par: $f(x) = 3x$.

Une primitive de f est une fonction F telle que $F' = f$
(La dérivée de F est f)

Une primitive de $\boldsymbol{x}$ est $\frac{1}{2}x^2$ donc une primitive de $f(x) = 3x$ est de la forme $\boldsymbol{F(x) = 3 \times \frac{1}{2}x^2 + C^{te} = \frac{3}{2}x^2 + C^{te}}$

20

Déterminer une primitive de$f$ définie par: $f(x) = 3e^{3x-7}$.

Une primitive de $U' \times e^U$ est e^U

Donc une primitive de $f(x) = 3e^{3x-7}$ est de la forme

$$\boldsymbol{F(x) = e^{3x-7} + C^{te}}$$

21

Déterminer une primitive de f définie par: $f(x) = 4e^{3x-7}$.

On fait apparaitre $U' \times e^{U}$ en écrivant $4e^{3x-7} = \frac{4}{3} \times 3e^{3x-7}$

Une primitive de $3e^{3x-7}$ étant e^{3x-7}, on en déduit **qu'une primitive de $f(x) = 4e^{3x-7}$ est de la forme:**

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{4}{3} \times e^{3x-7} + C^{te}}$$

22

Déterminer une primitive de f définie par: $f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$.

On remarque que $\frac{e^x}{e^x+2} = \frac{U'}{U}$ (U étant strictement positif)

Or une primitive de $\frac{U'}{U}$ avec $U > 0$ est $Ln(U)$

Une primitive de $f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$ est donc de la forme:

$$\boldsymbol{F(x) = Ln(e^x + 2) + C^{te}}$$

23

Vrai ou faux?

Une solution de l'équation différentielle $y' = f(x)$ sur un intervalle I est une primitive de f sur I

C'est vrai car par définition « F primitive de f sur I » signifie que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$, donc que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f(x)$.

24

Vrai ou Faux?

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{k}e^{-2x+1}$, k étant une constante réelle, est une solution de l'équation différentielle $y' = -2y$.

On doit vérifier si $f'^{(x)} = -2f(x)$.

Or $f'(x) = k \times (e^{-2x+1})' = k \times (-2) \times e^{-2x+1}$

$$= -2\underbrace{ke^{-2x+1}}_{f(x)} = -2f(x)$$

L'affirmation est donc vraie

25

Soit F, une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.

Vrai ou Faux? Le signe de f sur $\mathbb{R}$ donne les variations de F sur $\mathbb{R}$.

C'est vrai car par définition « F primitive de f sur I» signifie que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Or, C'est le signe de la dérivée $F' = f$ qui donne les variations de F .

26

Soit F (deux fois dérivable), une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.

Vrai ou Faux? Le signe de f sur $\mathbb{R}$ donne les variations de F'' sur $\mathbb{R}$.

F primitive de f sur I

donc pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$

donc pour tout $x \in I$, $F''(x) = f'(x)$

C'est donc faux car le signe de f ne donne pas les variations de f' (C'est le contraire).

Reprise des questions de cours

27

Sans calculatrice simplifier au maximum

$$\ln(e^2) - 3e^{\ln(2)}$$

28

Sans calculatrice simplifier au maximum

$$\ln\left(\frac{5}{7}\right)+\ln\left(\frac{7}{9}\right)+\ln\left(\frac{9}{5}\right)$$

29

Vrai ou Faux?

Pour tout réel x, $\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}} = 1 + e^{-2x}$

30

Quel est le signe de $\ln(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$?

31

Ecrire les limites aux bornes de leurs domaines de définition respectifs des fonctions Logarithme Népérien et exponentielle.

32

Donner les résultats des quatre limites suivantes:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \ \dots$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = \ \dots$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = \ \dots$	$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = \ \dots$

Etudier le signe de $f(x) = 1 + 3\ln(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$?

34

Etudier le signe de $f(x) = 1 - 2e^{x}$ sur $\mathbb{R}$

35

Résoudre l'inéquation $ex \geq e^2$

36

Déterminer tous les entiers naturels n tels que $0{,}3^n < e$

Correction de 27 à 36

27

Sans calculatrice simplifier au maximum

$$\ln(e^2) - 3e^{\ln(2)}$$

$$\ln(e^2) - 3e^{\ln(2)} = 2 - 3 \times 2$$
$$= 2 - 6 = -4$$

28

Sans calculatrice simplifier au maximum

$$\ln\left(\frac{5}{7}\right) + \ln\left(\frac{7}{9}\right) + \ln\left(\frac{9}{5}\right)$$

$$\ln\left(\frac{5}{7}\right) + \ln\left(\frac{7}{9}\right) + \ln\left(\frac{9}{5}\right)$$
$$= \ln(5) - \ln(7) + \ln(7) - \ln(9) + \ln(9) - \ln(5)$$
$$= 0$$

29

Vrai ou Faux?

Pour tout réel x, $\frac{e^x+e^{-x}}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$$1 + e^{-2x} = \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x} = \frac{e^x + e^{x-2x}}{e^x}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$$

C’est donc vrai

30

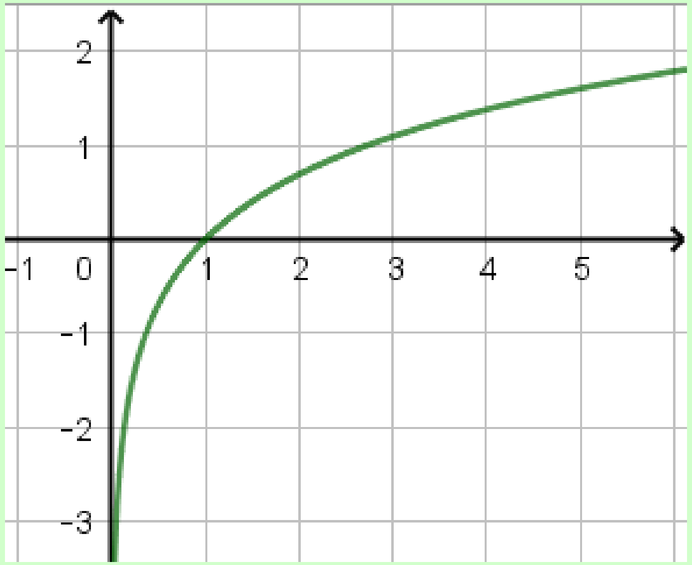
Quel est le signe de $\ln(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$?

- $\mathbf{\ln(x) < 0}$ **si** $\boldsymbol{x \in]0\ ;1\ [}$
- $\mathbf{\ln(1) = 0}$
- $\mathbf{\ln(x) > 0}$ **si** $\boldsymbol{x \in]1\ ;\ +\infty\ [}$

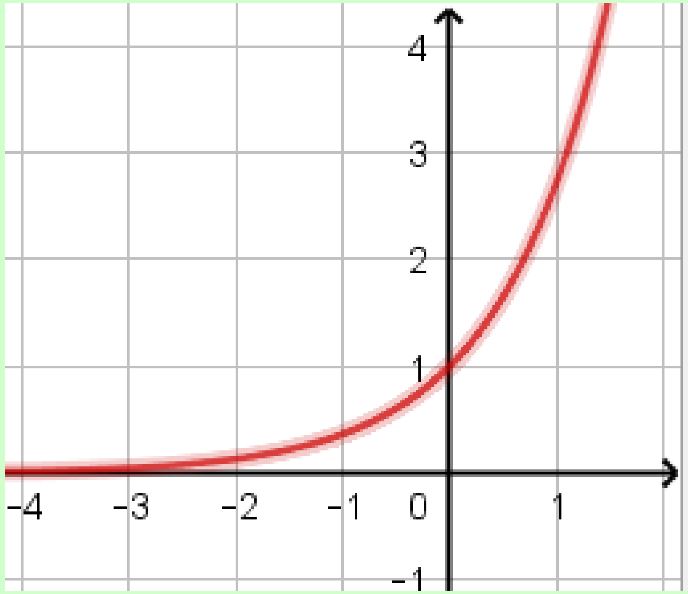
31

Ecrire les limites aux bornes de leurs domaines de définition respectifs des fonctions Logarithme Népérien et exponentielle.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$



$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

32

Donner les résultats des quatre limites suivantes:

<u>Croissance comparée</u>:

- À l'infini e^x l'emporte sur les puissances de x.
- À l'infini et en zéro, les puissances de x l'emportent sur $\ln(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \mathbf{0}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \mathbf{0}$	$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = \mathbf{0}$

33

Etudier le signe de $f(x) = 1 + 3\ln(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$?

On résout l'inéquation $1 + 3\ln(x) > 0$

$$1 + 3\ln(x) > 0$$
$$\Leftrightarrow 3\,ln(x) > -1$$
$$\Leftrightarrow ln(x) > \frac{-1}{3}$$
$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} > e^{-\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{3}}$$

<u>Bilan:</u>

- $1 + 3\ln(x) > 0$ **lorsque** $x \in]e^{-\frac{1}{3}}\,;\,+\infty[$
- $1 + 3\ln(x) \leq 0$ **lorsque** $x \in]-\infty\,;e^{-\frac{1}{3}}]$

34

Etudier le signe de $f(x) = 1 - 2e^x$ sur $\mathbb{R}$

On résout l'inéquation $1 - 2e^x > 0$

$$1 - 2e^x > \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow -2e^x > -\mathbf{1}$$

$$\Leftrightarrow e^x < \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x < -\ln(2)$$

<u>Bilan:</u>

- $\mathbf{1 - 2e^x > 0}$ **lorsque** $\boldsymbol{x} \in]-\infty\,; -\boldsymbol{ln}(\mathbf{2})[$
- $\mathbf{1 - 2e^x \leq 0}$ **lorsque** $\boldsymbol{x} \in [-\boldsymbol{ln}(\mathbf{2})\,;\, +\infty[$

35

Résoudre l'inéquation $ex \geq e^2$

Attention

Ici, il faut bien comprendre $e \times x$ et non pas e^x

$$ex \geq e^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{e^2}{e}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e$$

36 Déterminer tous les entiers naturels n tels que $0{,}3^n < e$

$$0{,}3^n < 0{,}01$$
$$\Leftrightarrow \ln(0{,}3^n) < \ln(\mathbf{0{,}01})$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{n} \times \ln(\mathbf{0{,}3}) < \ln(\mathbf{0{,}01})$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{n} > \frac{\ln(\mathbf{0{,}01})}{\ln(\mathbf{0{,}3})}$$

Car $\ln(\mathbf{0{,}3}) < \mathbf{0}$

$$\frac{\ln(\mathbf{0{,}01})}{\ln(\mathbf{0{,}3})} \approx \mathbf{3{,}8}$$

Donc $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{4}$

QCM et « Vrai ou Faux » tirés de sujets de Bac récents.

QCM 1:

une seule bonne réponse parmi les quatre proposées.

On ne demande pas de justifier

1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$

b. $f'(x) = (1 + 2x)\mathrm{e}^{x^2}$

c. $f'(x) = \left(1 + 2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$

d. $f'(x) = \left(2 + x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$

2

Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$

3

On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ tel que $h(a) = 1$.

d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$

4

On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.

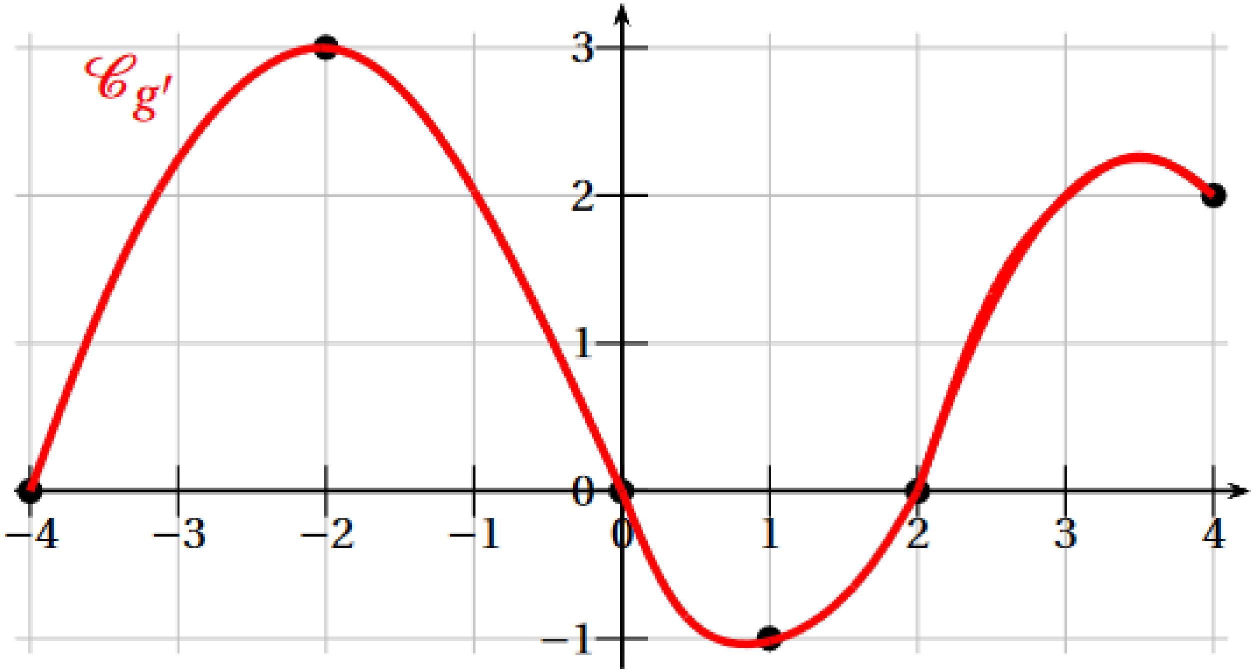
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

d. g admet un minimum en 0.



Correction de 1 à 4

1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$

b. $f'(x) = (1+2x)\mathrm{e}^{x^2}$

$\boxed{\textbf{c. } f'(x) = (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}}$

d. $f'(x) = (2+x^2)\mathrm{e}^{x^2}$

$$f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{x^2} + x\times 2x\mathrm{e}^{x^2} = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$$

2

Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1}$?

a. -1 **b.** 0 $\boxed{\textbf{c. } \frac{1}{2}}$ **d.** $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Stratégie:

- L'explication ci-dessus est une façon rigoureuse de justifier la réponse mais est peu adaptée ici puisqu'on ne nous demande pas de justifier.
- Il est plus judicieux ici , car plus rapide, de trouver la bonne réponse à l'aide de la calculatrice (Avec un tableau de valeur ou la courbe)

3

On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ telle que

$$h(-1)=0 \qquad h(0)=2 \qquad h(1)=0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.

b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0;\ 1]$ tel que $h(a)=1$.

d. l'équation $h(x)=1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

|| Application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

4

On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa **fonction dérivée** g'.

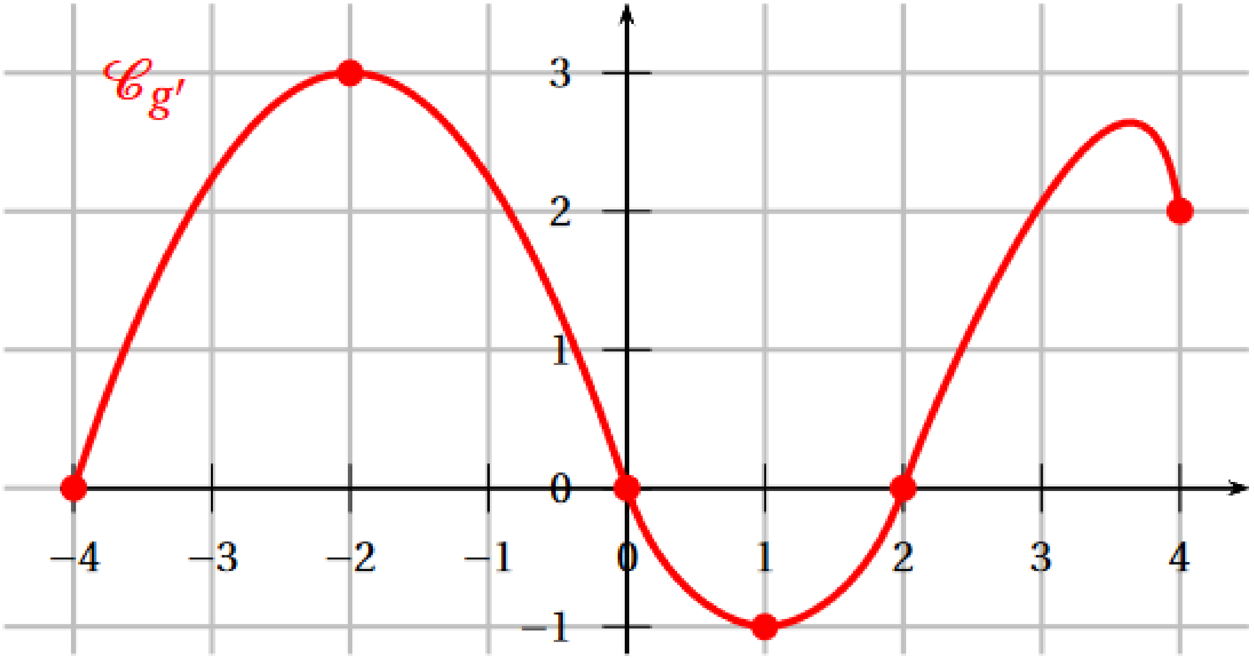
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

d. g admet un minimum en 0.



La fonction g' est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$, donc la fonction g est convexe sur cet intervalle.

QCM 2:

une seule bonne réponse parmi les Trois proposées.

On ne demande pas de justifier

5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)e^x.$$

A. La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = (2x - 2)e^x$.

B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$.

C. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5+\mathrm{e}^{x}}$.

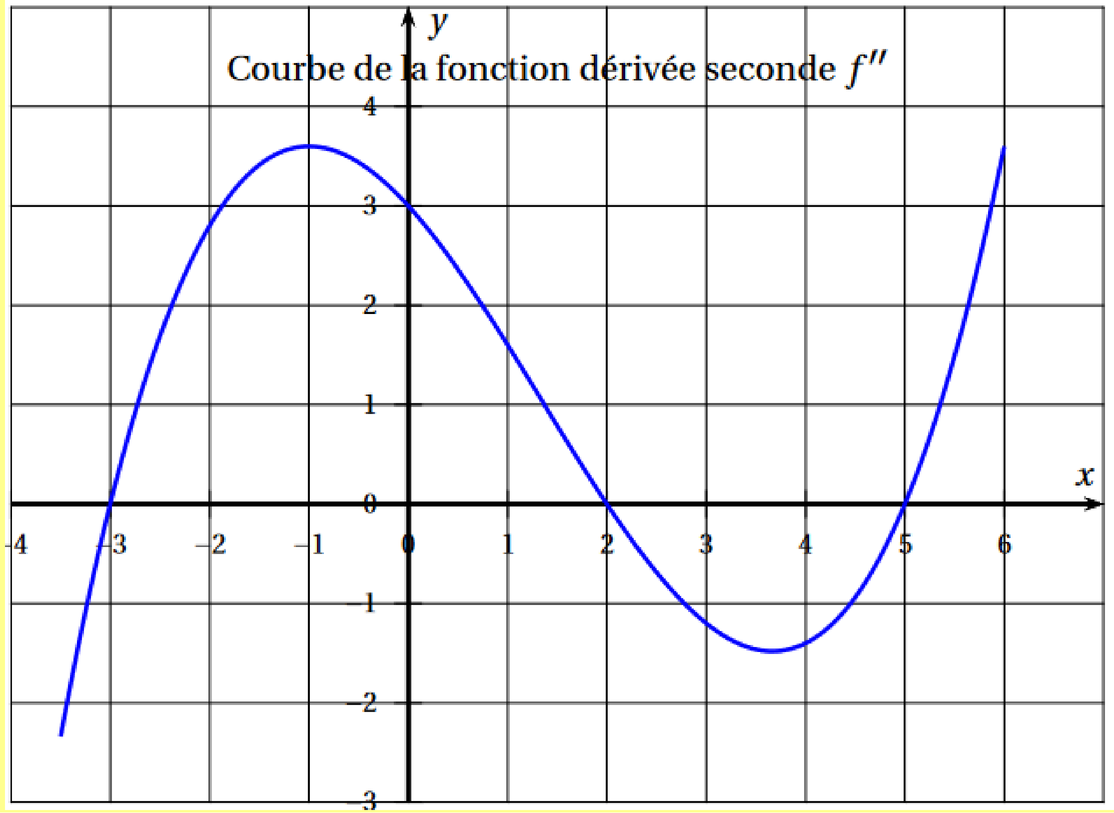
Sa courbe représentative dans un repère admet :

A. une seule asymptote horizontale ;

B. une asymptote horizontale et une asymptote verticale ;

C. deux asymptotes horizontales.

7 On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5\ ;\ 6]$.



A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.

B. La fonction f admet trois points d'inflexion.

C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0;\ 2]$.

Correction de 5 à 7

5

$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)e^x.$$

On a $f(x) = x^2e^x - 2xe^x - e^x$.

- On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, puis que
- $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^x = 0$

Par croissance comparée

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^x = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. $\boxed{\text{Réponse C.}}$

6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5+e^x}$.

✦ On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{3}{5}$: la droite d'équation $y = \dfrac{3}{5}$ est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini ;

✦ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini. Réponse C.

Stratégie:

- Ici on peut tout de suite éliminer l'idée d'une asymptote verticale car la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

7

On voit sur la figure que $f''(-3) = f''(2) = f''(5) = 0$: la dérivée seconde s'annule trois fois donc la fonction f admet trois points d'inflexion. Réponse B.

Stratégie:

- Ici la vigilance s'impose . Bien observer quelle courbe on nous donne: Celle de f, celle de f' ou celle de f''?
- De plus pour être rigoureux il faudrait ajouter que f'' s'annule 3 fois en changeant de signe,

Vrai ou Faux?

Ici vous devez justifier chaque réponse

8

Vrai ou Faux?

<u>Justifier</u>

Pour tous réels a et b, $\left(e^{a+b}\right)^2 = e^{2a} + e^{2b}$

9

Vrai ou Faux?

Justifier

Dans le plan muni d'un repère,
la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -2 + (3 - x)e^x$
admet pour équation réduite $y = 2x + 1$

10

Vrai ou Faux?

Justifier

$$\lim_{x \to +\infty} e^{2x} - e^{x} + \frac{3}{x} = 0$$

11

Vrai ou Faux?

<u>Justifier</u>

L’équation $1 - x + e^{-x} = 0$
admet une solution unique sur l’intervalle $[0\,;2]$.

12

Vrai ou Faux?

Justifier

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$g(x) = x^2 - 5x + e^x$ est convexe.

Correction de 8 à 12

8 Vrai ou Faux? <u>Justifier</u>

Pour tous réels a et b, $\left(e^{a+b}\right)^2 = e^{2a} + e^{2b}$

La meilleure stratégie ici est de repérer un contre-exemple facilement détectable.

En effet en prenant $a = b = 0$, on obtient:

- $(e^{a+b})^2 = (e^{0+0})^2 = 1^2 = 1$ alors que …
- $e^{2a} + e^{2b} = e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2 \neq 1$

Il est donc faux d'affirmer que pour tous réels a et b,

$$\boldsymbol{(e^{a+b})^2 = e^{2a} + e^{2b}}$$

<u>Remarque</u>: En utilisant les formules du cours on peut écrire:

$$(e^{a+b})^2 = e^{2(a+b)} = e^{2a} \times e^{2b} \neq e^{2a} + e^{2b}$$

9

Vrai ou Faux? <u>Justifier</u>: Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 + (3 - x)e^x$ admet pour équation réduite $y = 2x + 1$

L'équation de la tangente à la courbe de f , au point d'abscisse 0 est:

$$\boldsymbol{y = f'(0)(x - 0) + f(0)}$$

De plus $\boldsymbol{f(0)} = -2 + (3 - 0) \times e^0 = -2 + 3 = \mathbf{1}$ et

$$f'(x) = 0 + \underbrace{(-1)e^x + (3 - x)e^x}_{\text{Formule } (uv)' = u'v + uv'} = -e^x + 3e^x - xe^x = (2 - x)e^x$$

donc $\boldsymbol{f'(0) = 2}$

On obtient finalement l'équation $\boldsymbol{y = 2(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = 2x + 1}$

L'affirmation est donc Vraie

10 Vrai ou Faux? Justifier $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = 0$

Stratégie: On peut vite se faire une idée à l'aide de la calculatrice est conjecturer que la limite est plutôt $+\infty$. (Il faut au minimum noter cela en examen, car même si ce n'est pas une justification ce sera tout de même valoriser si vous précisez que vous en êtes conscient)

Pour justifier que **l'affirmation est fausse**: Tout d'abord $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$

On a une indétermination du type « $+\infty - \infty$ » (car e^{2x} et e^x tendent vers $+\infty$, quand x tend vers $+\infty$) qu'on lève en factorisant le terme qui semble prépondérant: $e^{2x} - e^x = e^{2x}\left(1 - \frac{e^x}{e^{2x}}\right) = e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{e^x} = 1$ donc par produit

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x = +\infty \neq 0}$

11 Vrai ou Faux? <u>Justifier</u>: L'équation $1 - x + e^{-x} = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0\,;2]$.

Soit $g(x) = 1 - x + e^{-x}$ alors **sur l'intervalle $[0\,;2]$**:

- **g est continu**
- g est dérivable et $g'(x) = -1 - e^{-x} < 0$ comme somme de deux négatifs donc **g strictement décroissante**
- $g(0) = 1 - 0 + 1 = 2 > 0$ et $g(2) = 1 - 2 + e^{-2} \approx -0{,}86 < 0$

Donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaire l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x + e^{-x} = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0\,;2]$

12

Vrai ou Faux? Justifier: La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 5x + e^x$ est convexe.

La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et:
$g'(x) = 2x - 5 + e^x$ $g''(x) = 2 + e^x > 0$ comme somme de deux positifs.

On a donc prouvé que $g''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc g est convexe.