Chapitre SUITES

Prérequis

1

(u_n) est définie pour tout entier naturel n par:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n.

2

(u_n) est définie pour tout entier naturel n par:

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$$

Calculer u_1 et u_2 .

3

(u_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$$

Quelle est la nature de cette suite?

4

(u_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

5

(u_n) est définie pour tout entier naturel n par:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 + n \end{cases}$$

Calculer u_1 et u_2 .

6

On calcule sur tableur les termes de la suite

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 + n \end{cases}$$

	A	B
1	n	u_n
2	0	4
3	1	2
4	2	1
5	3	1

Quelle formule écrire dans la cellule B3 pour obtenir tous les termes de la suite (u_n) en étirant cette formule vers le bas.

7

(u_n) est définie pour $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases}$$

Vrai ou Faux ? Justifier :

"La suite (u_n) est croissante"

8

Si je saisis $n = 2$, quelle valeur renvoie cet algorithme ?

Langage naturel
Saisir n $U \leftarrow 6$ Pour i allant de 1 à n $\quad U \leftarrow 7U - 4$ Fin pour Afficher(«Un=»,U)

9

Complétez les pointillés pour que l'algorithme renvoie la valeur du terme de rang n choisi de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} - 3n \end{cases}$$

Langage naturel
Saisir n $U \leftarrow$ ...? Pour i allant de 1 à n $U \leftarrow$ ....?........ Fin pour Afficher(«Un=»,U)

10

Décrire quel terme, de quelle suite est renvoyé par la commande :

suite(2)

```
def suite(n):
    u=150
    for i in range(n):
        u=0.8*u+200
    return(u)
```

Correction des Prérequis

1

(u_n) est définie pour $n \geqslant 0$ par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \end{cases}$$

Exprimez u_n en fonction de n.

(u_n) géométrique

$u_n = u_0 \times \text{raison}^n$

$= 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2

(u_n) est définie pour $n \geqslant 0$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$$

Calculer u_1 et u_2

$u_1 = 3u_0 - 5 = 3 \times (-2) - 5 = -11$

$u_2 = 3u_1 - 5 = 3 \times (-11) - 5 = -38$

3

On considère la suite (u_n) définie pour n entier $\geqslant 1$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$$

Quelle est la nature de cette suite ?

(u_n) est une suite arithmétique de 1er terme $u_1 = 3$ et de raison -4

4

On considère la suite (u_n) définie pour n entier $\geqslant 1$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$$

Déterminer l'expression de (u_n) en fonction de n.

(u_n) étant arithmétique,

on a $u_n = u_1 + (n-1) \times \text{raison}$

$= 3 + (n-1) \times (-4)$

$= 3 - 4n + 5 = 7 - 4n$

5

(u_n) est définie pour $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 + n \end{cases}$$

Calculer u_1 et u_2

$u_1 = u_0 - 3 + 0 = 4 - 3 = 1$

$u_2 = u_1 - 3 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

6

On calcule sur tableur les termes de la suite

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 + n \end{cases}$$

Quelle formule écrire dans la cellule B_3 pour obtenir tous les termes de la suite (u_n) en étirant cette formule vers le bas.

	A	B
1	n	u_n
2	0	4
3	1	2
4	2	1
5	3	1

Dans B_3, on écrit :

$$\boxed{= B_2 - 3 + A_2}$$

7

(u_n) est définie pour $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases}$$

Vrai ou Faux ? Justifier.

"La suite (u_n) est croissante"

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$u_{n+1} - u_n = -n^2 < 0$ pour $n > 0$

donc la suite (u_n) est décroissante.

l'Affirmation est Fausse.

8

Si je saisis $n = 2$, quelle valeur renvoie cet algorithme ?

Langage naturel
Saisir n
$U \leftarrow 6$
Pour i allant de 1 à n
$\quad U \leftarrow 7U - 4$
Fin pour
Afficher(«Un=»,U)

on a $u = 6$ et i va de 1 à 2

$i = 1$: $\quad u = 7 \times 6 - 4 = 38$

$i = 2$ $\quad u = 7 \times 38 - 4 = 262$

la valeur finale renvoyée est :

$U_n = 262$ pour $n = 2$

Complétez les pointillés pour que l'algorithme renvoie la valeur du terme de rang n choisi de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} - 3n \end{cases}$$

Langage naturel
Saisir n $U \leftarrow$? Pour i allant de 1 à n $U \leftarrow$ ..... ? ..... Fin pour Afficher(«Un=»,U)

Saisir n

$U \leftarrow 7$

Pour i allant de 1 à n

$u \leftarrow \frac{1}{u} -$ 3*(i-1)

Fin pour

Afficher («Un =», u)

10

Decrire quel terme, de quelle suite est renvoyé par la commande :

suite(2)

```python
def suite(n):
    u=150
    for i in range(n):
        u=0.8*u+200
    return(u)
```

la suite étudiée est definie par :

$$\begin{cases} u_0 = 150 \\ u_{n+1} = 0,8\, u_n + 200 \end{cases}$$

"suite(2)" renvoie le terme U_2

Attention!
i varie de 0 à 1

Cours et capacités attendues de Terminale

1

Parmi toutes ces suites définies pour $n \in \mathbb{N}$ déterminer celles qui divergent vers $+\infty$.

a) $u_n = 3n^2 - 4n + 1$

b) $u_n = 1000 \times 0{,}9^n$

c) $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 1{,}1\, u_n \end{cases}$

d) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n+1}$

e) $u_n = \dfrac{10n^2 - 2n}{2n - 1}$

f) $u_n = \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

2

On considère la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$

par $w_n = \dfrac{5n}{n+2}$

la seule bonne réponse pour $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$ est :

a) $\dfrac{5}{2}$

b) $+\infty$

c) 0

d) 5

3

On considère la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$

par : $v_n = \dfrac{3+2n}{n^2} - 1$

l'unique bonne réponse parmi les 4 propositions est :

a) (v_n) est divergente

c) On ne peut pas savoir

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -1$

4

Quelle est la valeur renvoyée par la commande

seuil(3) ?

```
def seuil(p):
    n=1
    while 1.2**n<=p:
        n=n+1
    return(n)
```

5

On considère la suite (u_n) telle que : $u_n = n^2 - 4$

La fonction seuil renvoie :

a) la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 1000$

b) la plus petite valeur de n telle que $u_n < 1000$

c) la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 1000$

```python
def seuil():
    n=0
    u=0
    while u<1000:
        u=n**2-4
        n=n+1
    return(n)
```

Correction de
1 à 5

1

Parmi toutes ces suites définies pour $n \in \mathbb{N}$ déterminer celles qui divergent vers $+\infty$.

a) $u_n = 3n^2 - 4n + 1$

b) $u_n = 1000 \times 0{,}9^n$

c) $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 1{,}1\,u_n \end{cases}$

d) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n+1}$

e) $u_n = \dfrac{10n^2 - 2n}{2n - 1}$

f) $u_n = \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

calculatrice possible.

a) idée écrire $u_n = n^2\left(3 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

b) Non car $0{,}9^n \to 0$ car $0 < 0{,}9 < 1$

c) Vrai car $u_n = 7 \times 1{,}1^n$ et $1{,}1^n \to +\infty$ et $7 > 0$
car $1{,}1 > 1$

d) Vrai : idée vérifier que $u_n = \dfrac{n\left(2 - \frac{3}{n^2}\right)}{1 + \frac{1}{n}}$

e) idem que d)

f) Faux : $\frac{1}{n+1} \to 0^+$ donc $\ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \to -\infty$ (composée)

2

On considère la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \frac{5n}{n+2}$

La seule bonne réponse pour $\lim_{n \to +\infty} w_n$ est :

a) $\frac{5}{2}$ c) 0

b) $+\infty$ d) 5

d) 5 calculatrice interdite

en effet. $\frac{5n}{n+1} = \frac{n \times 5}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{5}{1+\frac{1}{n}}$

qd $n \to +\infty$ $1+\frac{1}{n} \to 1$

donc $\frac{5}{1+\frac{1}{n}} \to 5$ par quotient

3

On considère la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{3+2n}{n^2} - 1$

L'unique bonne réponse parmi les 4 propositions est :

a) (v_n) est divergente

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

c) On ne peut pas savoir

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -1$

réponse d) :

calculatrice interdite.

$$\frac{3+2n}{n^2} = \frac{n\left(\frac{3}{n}+2\right)}{n^2} = \frac{\frac{3}{n}+2}{n}$$

qd $n \to +\infty$ $\frac{3}{n}+2 \to 2$ et $n \to +\infty$

donc par quotient $\frac{3+2n}{n^2} \to 0$

donc $v_n \to 0-1 = -1$

4

Quelle est la valeur renvoyée par la commande

seuil(3) ?

```
def seuil(p):
    n=1
    while 1.2**n<=p:
        n=n+1
    return(n)
```

$n=1$ $\quad 1{,}2^1 = 1{,}2 \leq 3$ vrai

$n=2$ $\quad 1{,}2^2 = 1{,}44 < 3$ vrai

⋮

on cherche le 1er n tq $1{,}2^n > 3$

avec la calculatrice on trouve. $n=7$

"seuil(3)" renvoie $n=7$

5

On considère la suite (u_n) telle que : $u_n = n^2 - 4$

La fonction seuil renvoie :

a) la plus grande valeur de n telle que $u_n \geq 1000$

b) la plus petite valeur de n telle que $u_n < 1000$

c) la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 1000$

```
def seuil:       oubli
    n=0          u=0
    while u<1000:
        u=n**2-4
        n=n+1
    return(n)
```

En fait $\lim_{n \to +\infty} n^2 - 4 = +\infty$

la fonction seuil renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 1000$

réponse c (rendu brut : $n = 33$)

6

Laquelle de ces quatre affirmations est vraie :

a) Une suite bornée est convergente

c) Une suite convergente est bornée

b) Une suite non majorée a pour limite $+\infty$

d) Une suite décroissante et minorée par 2 converge vers 2.

7

Pour chacun des cas ci-dessous dire si on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente, divergente ou si on ne peut pas le savoir.

(u_n) est croissante et majorée

8

Pour chacun des cas ci-dessous dire si on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente, divergente ou si on ne peut pas le savoir.

(u_n) est décroissante et non minorée

9

Pour chacun des cas ci-dessous dire si on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente, divergente ou si on ne peut pas le savoir.

u_n est croissante et non minorée

10

Pour chacun des cas ci-dessous dire si on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente, divergente ou si on ne peut pas le savoir.

(u_n) est décroissante

11

Pour chacun des cas ci-dessous dire si on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente, divergente ou si on ne peut pas le savoir.

(u_n) est croissante et non majorée

12

À la question : "prouver que la suite (u_n) est croissante" un élève a répondu :

"On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc forcément la suite (u_n) est croissante"

Qu'en pensez vous ?

Argumentez.

Correction de 6 à 12

6

Laquelle de ces quatre affirmations est vraie :

a) Une suite bornée est convergente

b) Une suite non majorée a pour limite +∞

c) Une suite convergente est bornée.

d) Une suite décroissante et minorée par 2 converge vers 2.

c) une suite convergente est bornée.

résultat du cours "bilan sur limites de suites"

Remarque de la définition 1

7

Pour chacun des cas ci-dessous dire si on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente, divergente ou si on ne peut pas le savoir.

(u_n) est croissante et majorée

Suite 1

cours "limites de suites"

Propriété 3

Une suite croissante et majorée est convergente

8

Pour chacun des cas ci-dessous dire si on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente, divergente ou si on ne peut pas le savoir.

(u_n) est décroissante et non minorée

Suite 1

Cours " limites de suite "

Propriété 3

Une suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$

9

Pour chacun des cas ci-dessous dire si on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente, divergente ou si on ne peut pas le savoir.

u_n est croissante et non minorée

on ne peut pas savoir.

10

Pour chacun des cas ci-dessous dire si on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente, divergente ou si on ne peut pas le savoir.

(u_n) est décroissante

On ne peut pas savoir

11

Pour chacun des cas ci-dessous dire si on peut affirmer que la suite (u_n) est convergente, divergente ou si on ne peut pas le savoir.

(u_n) est croissante et non majorée

Suite 1

Cours " limites de Suites "

Propriété 3.

Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

12

À la question : "prouver que la suite (u_n) est croissante" un élève a répondu.

"On sait que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc forcément la suite (u_n) est croissante"

Qu'en pensez vous ?

Argumentez.

Faux ! par exemple la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ tend vers $+\infty$ mais n'est pas croissante.

13

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

Calculez u_1 et v_1

14

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

On admet que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives

Prouver que la suite (v_n) est croissante

15

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

On vient de prouver que (v_n) est croissante.

Trouver un minorant le plus grand possible pour la suite (v_n).

Correction de 13 à 15

13

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

Calculez u_1 et v_1

$u_1 = 2u_0 + v_0 = 2 \times 2 + 2 = 6$

$v_1 = 3u_0 + v_0 = 3 \times 2 + 2 = 8$

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

On admet que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives

Prouver que la suite (v_n) est croissante

$v_{n+1} = 3\,u_n + v_n$

donc $v_{n+1} - v_n = 3\,u_n$

or $(u_n) > 0$ pour tout n

donc $v_{n+1} - v_n > 0$ pour tout n

donc (v_n) croissante

15

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

On vient de prouver que (v_n) est croissante.

Trouver un minorant le plus grand possible pour la suite (v_n).

Une suite croissante est minorée par son 1er terme

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n \geq v_0 = 2$

(v_n) est minorée par 2

16

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On veut prouver par récurrence que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$

Rédiger l'initialisation

17

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 1 \end{cases}$$

On veut prouver par récurrence que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

Rédiger la phrase d'hérédité

18

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On admet avoir prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

Prouver que la suite (u_n) est convergente

19

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On définit alors la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - 2$$

Prouver que (v_n) est géométrique.

20

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On définit alors la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - 2$$

On a prouvé que (v_n) est géométrique

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = 2 + 2 \times 0{,}5^n$$

21

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On a prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = 2 + 2 \times 0{,}5^n$$

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ en justifiant.

22

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0,5\, u_n + 1 \end{cases}$$

Déterminer l'expression de la fonction f qui permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

23

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On sait que (u_n) converge vers 2 d'après les questions précédentes et on vient de trouver la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

Comment aurait-on pu en utilisant cette fonction f trouver la limite 2 de la suite (u_n) ?

Correction de 16 à 23

16

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On veut prouver par récurrence que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

Rédiger l'initialisation

$u_0 = 4$ et $u_1 = 0{,}5 \times u_0 + 1$
$= 0{,}5 \times 4 + 1 = 3$

or $2 \leq 3 \leq 4 \leq 4$

donc $2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 4$

donc Propriété vraie pour $n = 0$

17

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On veut prouver par récurrence que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

Rédiger la phrase d'hérédité

Supposons que pour un certain rang k P(k) soit vraie c'à dire

$2 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 4$

et prouvons qu'à cette condition la propriété est vrai au rang $k+1$ c'à dire que $2 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 4$

18

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On admet avoir prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

Prouver que la suite (u_n) est convergente

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

alors (u_n) est décroissante

et minorée par 2.

donc (u_n) est convergente

19

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On définit alors la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$v_n = u_n - 2$

Prouver que (v_n) est géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 0{,}5\, u_n + 1 - 2$

or $v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2$

donc $v_{n+1} = 0{,}5\, u_n - 1$

$= 0{,}5\,(v_n + 2) - 1$

$= 0{,}5\, v_n + 1 - 1$

$= 0{,}5\, v_n$

(v_n) géométrique de raison $0{,}5$

20

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On définit alors la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$v_n = u_n - 2$

On a prouvé que (v_n) est géométrique

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = 2 + 2 \times 0{,}5^n$$

(v_n) géométrique de raison $0{,}5$

donc $v_n = v_0 \times \text{raison}^n = 2 \times 0{,}5^n$

(car $v_0 = u_0 - 2 = 4 - 2 = 2$)

or $u_n = v_n + 2 = 2 + v_n$

$= 2 + 2 \times 0{,}5^n$

21

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On a prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = 2 + 2 \times 0{,}5^n$$

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ en justifiant

comme $-1 < 0{,}5 < 1$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 + 2 \times 0{,}5^n = 2$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

22

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

Déterminer l'expression de la fonction f qui permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

$$u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1$$

donc $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = 0{,}5x + 1$$

23

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 1 \end{cases}$$

On sait que (u_n) converge vers 2 d'après les questions précédentes et on vient de trouver la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

Comment aurait-on pu en utilisant cette fonction f trouver la limite 2 de la suite (u_n) ?

On sait que si une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ converge alors sa limite L vérifie $f(L) = L$

Avec f continue

$\Leftrightarrow \quad 0{,}5L + 1 = L \Leftrightarrow L - 0{,}5L = 1$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}5L = 1 \quad \Leftrightarrow \quad L = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$

24

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$

et la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Prouver que f est croissante sur [0 ; +∞[

25

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$

et la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Justifier que $1 \leq u_1 \leq u_0$

26

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$

et la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Si on sait que $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$, pourquoi peut on en déduire que $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$?

27

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$

et la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Déduire des questions 25 et 26 que la suite (u_n) est convergente.

28

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$

par $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 1}$

et la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Trouver l'unique bonne réponse

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

d) on ne peut pas savoir

Correction de 24 à 28

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$

et la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Prouver que f est croissante sur [0 ; +∞[

$f = \dfrac{u}{v}$ donc $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$= \dfrac{3 \times (x+1) - (3x-1) \times 1}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$ or $4>0$ et $(x+1)^2 > 0$ sur $[0;+\infty[$

donc par quotient $f'(x) > 0$ et f croissante sur $[0, +\infty[$

25

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

et la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Justifier que $1 \leq u_1 \leq u_0$

$$u_1 = \frac{3u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 \times 2 - 1}{2+1} = \frac{5}{3}$$

or $1 \leq \frac{5}{3} \leq 2$

donc $1 \leq u_1 \leq u_0$

26

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

et la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Si on sait que $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$, pourquoi peut on en déduire que $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$?

---

on a prouvé que f croissante sur $[0; +\infty[$ donc conserve l'ordre

ainsi, si $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$

alors $f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$

donc $\overset{\|}{1} \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$

27

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

et la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Déduire des questions 25 et 26 que la suite (u_n) est convergente.

25 et 26 permettent de prouver par récurrence que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, elle est donc convergente

28

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$

et la suite (u_n) telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

Trouver l'unique bonne réponse

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

d) on ne peut pas savoir

On a prouvé que la suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente donc sa limite vérifie $f(L) = L$

Avec f continue Sur $[0; +\infty[$

$\Leftrightarrow \dfrac{3L-1}{L+1} = L \Leftrightarrow 3L - 1 = (L+1)L$

$\Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \Leftrightarrow (L-1)^2 = 0 \Leftrightarrow L = 1$

29

Soient (u_n) et (v_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et soit (w_n) telle que $u_n \leq w_n \leq v_n$ pour tout n

Choisir l'unique bonne réponse :

a) la suite (u_n) est géométrique

b) la suite (w_n) converge vers 4

c) la suite (v_n) est majorée par 4

d) la suite (w_n) est croissante.

30

(w_n) est une suite telle que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq w_n \leq n+1$

On peut en déduire l'unique réponse :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$

b) la suite de terme général $u_n = w_n - n$ est majorée par 0

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

d) la suite (w_n) est bornée.

31

La suite (u_n) est telle que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq -3 - u_n \leq 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

trouver l'unique bonne réponse :

a) (u_n) converge vers 3

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -3$

b) (u_n) est une suite géométrique

d) (v_n) définie par $v_n = -3 - u_n$ est géométrique

32

Sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e^{-n}$, on peut affirmer l'unique bonne réponse :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

b) (u_n) est minorée par 0.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

d) on ne peut pas conclure sur $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

33

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \leq -2n^2 + 1000$$

Vrai ou Faux ?

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Correction de 29 à 33

29

Soient (u_n) et (v_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$u_n = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $v_n = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et soit (w_n) telle que $u_n \leq w_n \leq v_n$ pour tout n

choisir l'unique bonne réponse.

a) la suite (v_n) est géométrique

b) la suite (w_n) converge vers 4

c) la suite (v_n) est majorée par 4

d) la suite (w_n) est croissante.

réponse b la suite converge vers 4.

Théorème des gendarmes.

30

(w_n) est une suite telle que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq w_n \leq n+1$
On peut en déduire l'unique réponse :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$

b) la suite de terme général $u_n = w_n - n$ est majorée par 0

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

d) la suite (w_n) est bornée ;

réponse c $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

car $w_n \geq n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

Théorème de comparaison.

31

La suite (u_n) est telle que :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq -3 - u_n \leq 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$
trouver l'unique bonne réponse :

a) (u_n) converge vers 3

b) (u_n) est une suite géométrique

c) $\lim_{n \to +\infty} u_n = -3$

d) (v_n) définie par $v_n = -3 - u_n$ est géométrique

réponse c) car $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

car $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

d'après le théorème des gendarmes

$-3 - u_n \to 0$ donc $u_n \to -3$

32

Sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e^{-n}$, on peut affirmer l'unique bonne réponse :

a) $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

c) $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

b) (u_n) est minorée par 0.

d) on ne peut pas conclure sur $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

---

réponse d) $\left(\lim_{n \to +\infty} e^{-n} = 0 \right)$

on ne peut pas conclure.

33

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \leq -2n^2 + 1000$$

Vrai ou Faux ?

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Vrai car $\lim\limits_{n \to +\infty} -2n^2 + 1000 = -\infty$

donc par comparaison

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$