EX1 : Simplifier sans calculatrice

1) $\frac{12}{16}=\frac{4\times3}{4\times4}=\frac{3}{4}$	7) $1\div\frac{3}{4}=1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$	13) $\dots=\frac{4500}{500}=\frac{45}{5}=\frac{9\times\cancel{5}}{\cancel{5}}=9$
2) $\frac{-6}{36}=\frac{-1\times6}{6\times6}=-\frac{1}{6}$	8) $\frac{5}{7}-\frac{3}{14}=\frac{5\times2}{7\times2}-\frac{3}{14}=\frac{10}{14}-\frac{3}{14}=\frac{10-3}{14}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$	14) $\frac{0{,}2\cancel{\pi}}{0{,}6\cancel{\pi}}=\frac{0{,}2}{0{,}6}=\frac{2}{6}=\frac{\cancel{2}\times1}{\cancel{2}\times3}=\frac{1}{3}$
3) $\frac{-1}{6}+\frac{7}{6}=\frac{-1+7}{6}=\frac{6}{6}=1$	9) $2+\frac{1}{3}=\frac{2\times3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6+1}{3}=\frac{7}{3}$	15) $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1^2}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$
4) $\frac{\cancel{4}}{3}\times\frac{5}{\cancel{4}}=\frac{5}{3}$	10) $2+\frac{1}{x}=\frac{2\times x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2x+1}{x}$	16) $-2\left(1-\frac{1}{3}\right)=-2\left(\frac{1\times3}{3}-\frac{1}{3}\right)=-2\left(\frac{3-1}{3}\right)=-2\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$
5) $7\times\frac{5}{14}=\cancel{7}\times\frac{5}{2\times\cancel{7}}=\frac{5}{2}$	11) $\frac{8+x}{1}=8+x$	17) $\frac{2}{1-2x}-1=\frac{2}{1-2x}-\frac{1-2x}{1-2x}=\frac{2-(1-2x)}{1-2x}=\frac{2-1+2x}{1-2x}=\frac{1+2x}{1-2x}$
6) $-3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\cancel{3}\times\frac{2}{\cancel{3}}=2$	12) $\frac{8x}{x}=8$	18) $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n\times1}{n(n+1)}-\frac{(n+1)\times1}{(n+1)n}=\frac{n-n-1}{n(n+1)}=-\frac{1}{n(n+1)}$

EX2 : Ecrire sous la forme a^n

1) $\frac{1}{5^4}=5^{-4}$	4) $\frac{25^4}{5^6}=\frac{(5^2)^4}{5^6}=\frac{5^8}{5^6}=5^{8-6}=5^2$	7) $\frac{5^{-2}\times5^{-7}}{5^{-1}}=\frac{5^{-9}}{5^{-1}}=5^{-9+1}=5^{-8}$	10) $\frac{a}{\frac{a^{-3n}}{a^{1-3n}}}=a\times\frac{a^{1-3n}}{a^{-3n}}=\frac{a^{2-3n}}{a^{-3n}}=a^{2-3n+3n}=a^2$
2) $(2^3)^4=2^{3\times4}=2^{12}$	5) $(\sqrt{3})^4=(\sqrt{3}^2)^2=3^2$	8) $2\times2^n=2^1\times2^n=2^{n+1}$	11) $16^{5n}\times4=(4^2)^{5n}\times4=4^{10n}\times4=4^{10n+1}=2^{20n+2}$
3) $7\times7^3=7^1\times7^3=7^4$	6) $4^3\times5^3=(4\times5)^3=20^3$	9) $a^n\times a^{1-n}=a^{n+1-n}=a^1=a$	12)

EX3 : Simplifier au maximum

1) $\frac{15^2}{5}=\frac{3^2\times5^2}{5}=3^2\times5=45$	2) $\left(\frac{15}{5}\right)^2=3^2=9$	3) $(3a)^2-3a^2=9a^2-3a^2=6a^2$	4) $\dots=\frac{(2^3)^3\times\cancel{3^2}\times5^2}{\cancel{3^2}\times5\times(2^4)^2}=\frac{2^9\times5^2}{2^8\times5}=10^1$

EX4 : Simplifier si possible

1) $\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$	2) $(\sqrt{3})^2=3$	3) $\sqrt{7}\times2\sqrt{7}=2(\sqrt{7})^2=2\times7=14$	4) $\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$	5) $(2\sqrt{3})^2=2^2\times\sqrt{3}^2=4\times3=12$	6) $2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$

TSVP

EX5 : Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ (b minimal, a et b entiers)

1 $\sqrt{8} = \sqrt{4\times2} = \sqrt{4}\times\sqrt{2} = \underline{2\sqrt{2}}$

2 $\sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = \underline{2\sqrt{3}}$

3 $3\sqrt{2}\times5\sqrt{70} = 3\sqrt{2}\times5\times\sqrt{2\times35}$

$= 3\sqrt{2}\times5\times\sqrt{2}\times\sqrt{35}$

$= 3\times2\times5\times\sqrt{35}$

$= \underline{30\sqrt{35}}$

4 $\sqrt{32}+5\sqrt{8}-\sqrt{18}$

$= \sqrt{16\times2}+5\times\sqrt{4\times2}-\sqrt{9\times2}$

$= \sqrt{16}\times\sqrt{2}+5\times\sqrt{4}\times\sqrt{2}-\sqrt{9}\times\sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}+10\sqrt{2}-3\sqrt{2}$

$= \underline{11\sqrt{2}}$

EX6 : Écrire sans $\sqrt{\ }$ au dénominateur.

1 $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

2 $\dfrac{5}{\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{5\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$= \dfrac{5\sqrt{5}}{5} - \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{5\sqrt{5}-\sqrt{5}}{5} = \underline{\dfrac{4\sqrt{5}}{5}}$

3 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{1\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$

$= \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2} = \underline{\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}}$

utilisation de l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

EX7 : Développer et réduire.

1 $(6-2x)(3-x) = 6\times3 - 6\times x - 2x\times3 + 2x\times x$

$= 18 - 6x - 6x + 2x^2$

$= \underline{2x^2 - 12x + 18}$

2 $3+(3x-1)(3x+1) = 3 + (3x)^2 - 1^2$

$= 3 + 9x^2 - 1 = \underline{9x^2+2}$

3 $(6-2x) - (3-x)$

$= 6 - 2x - 3 + x = \underline{-x+3}$

4 $(3x-1)^2 = (3x)^2 - 2\times3x\times1 + 1^2$

$= \underline{9x^2 - 6x + 1}$

5 $(-3x-1)^2 = (-3x)^2 - 2\times(-3x)\times1 + 1^2$

$= \underline{9x^2 + 6x + 1}$.

Remarque : $(-3x-1)^2 = (-(3x+1))^2 = (3x+1)^2$

6 $5 - (2x+5)^2 = 5 - ((2x)^2 + 2\times2x\times5 + 5^2)$

$= 5 - (4x^2 + 20x + 25)$

$= 5 - 4x^2 - 20x - 25$

$= \underline{-4x^2 - 20x - 20}$

7 $-3(-x+2)(2x+7)$

$= -3(-x\times2x - x\times7 + 2\times2x + 2\times7)$

$= -3(-2x^2 - 7x + 4x + 14)$

$= -3(-2x^2 - 3x + 14)$

$= \underline{6x^2 + 9x - 42}$

8 $-(x-1)^2 - (x+1)(x-1)$

$= -(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 1)$

$= -x^2 + 2x - 1 - x^2 + 1$

$= \underline{-2x^2 + 2x}$

EX8 : Factorisations.

1 $x - x^2$ $= x \times 1 - x \times x$ $= x(1-x)$	**2** $3x^2 - 12x + 6x^3$ $= 3x \times x - 3x \times 4 + 3x \times 2x^2$ $= 3x(x - 4 + 2x^2)$ $= 3x(2x^2 + x - 4)$	**3** $x - 4 + 2x(x-4)$ $= (x-4) \times 1 + (x-4) \times 2x$ $= (x-4)(1+2x)$	**4** $16 - x^2$ $= 4^2 - x^2$ $= (4-x)(4+x)$

5
$$4x^2 + 24x + 36$$
$$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 6 + 6^2$$
$$= (2x+6)^2$$

6
$$(x-3)^2 - (x-3)(-x+2)$$
$$= (x-3)\big((x-3) - (-x+2)\big)$$
$$= (x-3)(x - 3 + x - 2)$$
$$= (x-3)(2x-5)$$

7
$$3x(x+2) - 2x$$
$$= x\big(3(x+2) - 2\big) = x(3x + 6 - 2)$$
$$= x(3x+4)$$

8
$$4(-x+1)^2 - 25$$
$$= [2(-x+1)]^2 - 5^2$$
$$= \big(2(-x+1) - 5\big)\big(2(-x+1) + 5\big)$$
$$= (-2x+2-5)(-2x+2+5) = (-2x-3)(-2x+7)$$

EX9 : Ecrire sous forme d'un quotient.

1
$$\frac{8}{x} - \frac{1+8x}{x^2} = \frac{x \times 8}{x \times x} - \frac{1+8x}{x^2}$$
$$= \frac{8x - (1+8x)}{x^2} = \frac{8x - 1 - 8x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

2
$$\frac{-1}{x+3} - \frac{3}{x^2-9} = \frac{-1 \times (x-3)}{(x+3) \times (x-3)} - \frac{3}{x^2-9}$$
$$= \frac{x-3}{x^2-9} - \frac{3}{x^2-9} = \frac{x-3-3}{x^2-9} = \frac{x-6}{x^2-9}$$

3
$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1 \times \sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n}$$
$$= \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

4
$$8^n - \frac{2^n}{5^{n+1}} = \frac{8^n \times 5^{n+1}}{1 \times 5^{n+1}} - \frac{2^n}{5^{n+1}}$$
$$= \frac{8^n \times 5^{n+1} - 2^n}{5^{n+1}} = \frac{2^n(4^n \times 5^{n+1} - 1)}{5^{n+1}}$$

EX10 : Résolutions d'équations.

1 $-2x + 1 = 4x + 3$ $-2x - 4x = 3 - 1$ $-6x = 2$ $x = \frac{2}{-6}$ $x = -\frac{1}{3}$ $S = \{-\frac{1}{3}\}$	**2** $x^2 = 7$ $\Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$ $S = \{-\sqrt{7} ; \sqrt{7}\}$	**3** $(2x-3)(3x+4) = 0$ $\Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ ou $3x + 4 = 0$ d'après la règle du produit nul. $\Leftrightarrow 2x = 3$ ou $3x = -4$ $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{4}{3}$ $S = \{-\frac{4}{3} ; \frac{3}{2}\}$	**4** $(2x-3) - (3x+4) = 0$ $\Leftrightarrow 2x - 3 - 3x - 4 = 0$ $\Leftrightarrow -x - 7 = 0$ $\Leftrightarrow -7 = x$ $S = \{-7\}$

5) $2x = x^2$

$\Leftrightarrow 2x - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(2-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

$S = \{0 ; 2\}$

6) $9 - (2x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3^2 - (2x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3 - (2x+1))(3 + (2x+1)) = 0$

$\Leftrightarrow (3 - 2x - 1)(3 + 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (-2x+2)(2x+4) = 0$

$\Leftrightarrow (-2x+2) = 0$ ou $2x+4=0$

$\Leftrightarrow -2x = -2$ ou $2x = -4$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{-2} = 1$ ou $x = \frac{-4}{2} = -2$

$S = \{1 ; -2\}$

7) $1 - \frac{3}{x+1} = 0$ cette equation n'est definie que si $x \neq -1$

Dans ce cas

$1 - \frac{3}{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{3}{x+1}$

$\Leftrightarrow 1 \times (x+1) = 3$

$\Leftrightarrow x + 1 = 3$

$\Leftrightarrow x = 3 - 1 = 2$

comme $2 \neq -1$

$S = \{2\}$

8) $\frac{5-2x}{3+3x} = 4$ Cette equation n'est définie que si $3+3x \neq 0$ donc $x \neq -1$

Dans ce cas

$\frac{5-2x}{3+3x} = 4$

$\Leftrightarrow 5 - 2x = 4(3+3x)$

$\Leftrightarrow 5 - 2x = 12 + 12x$

$\Leftrightarrow -2x - 12x = 12 - 5$

$\Leftrightarrow -14x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{-14}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

comme $-\frac{1}{2} \neq -1$ $S = \{-\frac{1}{2}\}$

EX 11 Intersection avec les axes.

1) Les points d'intersection de la Courbe C et de la droite d ont pour abscisses les solutions éventuelles de l'equation

$x^2 - 2x + 3 = 3x + 3$ (E)

or (E) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 - 3x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 5 = 0$ (Règle du produit nul.)

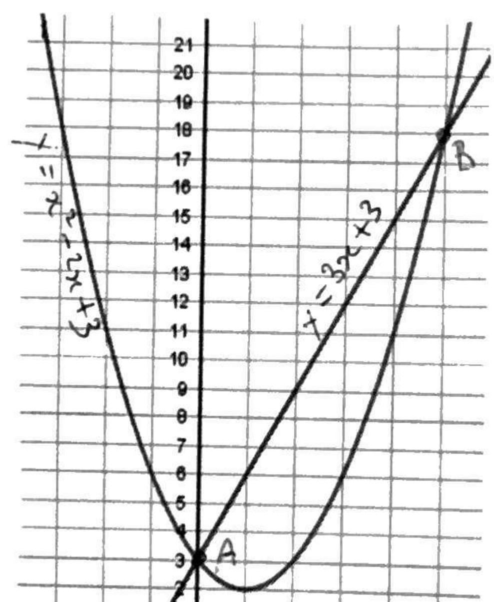
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5$

de plus $3 \times 0 + 3 = 3$ et $3 \times 5 + 3 = 18$

donc les points d'intersection cherchés sont:

$A(0 ; 3)$ et $B(5 ; 18)$

Interprétation graphique



2) Le point cherché a pour coordonnées $(0 ; f(0))$

avec $f(x) = x^2 - 2x + 3$

or $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 + 3 = 3$

donc le point cherché est:

$A(0 ; 3)$

Rq: Déja trouvé dans le 1°)

3) En utilisant les mêmes idées que dans 1°)

on résoud $2x^2 - 7 = 0$ (l'equation de l'axe des abscisses est $y = 0$)

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{7}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{7}{2}}$

les point cherchés sont donc

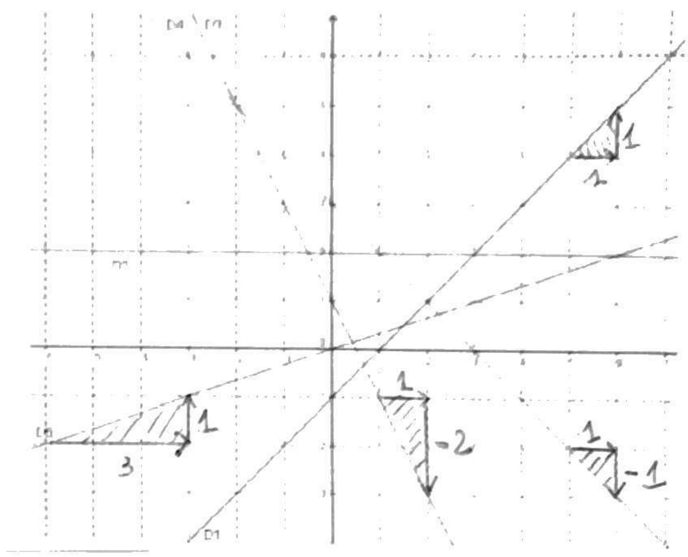
$C(\sqrt{\frac{7}{2}} ; 0)$ et $D(-\sqrt{\frac{7}{2}} ; 0)$

cients directeurs.

a) Pour chacune des droites, compléter

Droite	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
D1	1	-1
D2	0	2
D3	-2	1
D4	-1	3
D5	$\frac{1}{3}$	0

, D_2 // axe des abscisses



b) En déduire l'équation de chaque droite.

D_1 $y = 1x - 1 \iff y = x - 1$

D_2 : $y = 2$

D_3 $y = -2x + 1$

D_4 : $y = -1x + 3 \iff y = -x + 3$

D_5 : $y = \frac{1}{3}x$

EX 13 Equation réduite

1) M et N n'ayant pas la même abscisse (MN) a une équation de la forme $y = mx + p$

recherche de m $m = \dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \dfrac{4 - (-14)}{1 - (-5)} = \dfrac{18}{6} = 3$

donc l'équation cherchée est de la forme $y = 3x + p$.

recherche de p

On sait que $N(1;4) \in (MN)$, donc ses coordonnées doivent vérifier l'équation de (MN), $y = 3x + p$

donc $y_N = 3x_N + p \iff 4 = 3 \times 1 + p$

$\iff p = 4 - 3 = 1$

L'équation réduite de (MN) est donc :

$y = 3x + 1$

2°) reformulation de la question :

Est-ce que $y_R = 3x_R + 1$?

on calcule :

$3x_R + 1 = 3 \times 10 + 1 = 31$

or $y_R = 30$

donc $y_R \neq 3x_R + 1$

donc le point R n'appartient pas à la droite (MN).

TSVP

EX 14 : Manipulation d'inégalités.

1

$0 \leq x \leq y \leq 4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\times 0 \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}y \leq \frac{1}{2}\times 4 \quad \downarrow \times\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0+2 \leq \frac{1}{2}x+2 \leq \frac{1}{2}y+2 \leq 2+2$

$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{2}x+2 \leq \frac{1}{2}y+2 \leq 4$

donc $0 \leq \frac{1}{2}x+2 \leq \frac{1}{2}y+2 \leq 4$

car $0 \leq 2$

2

$\begin{cases} 2 \leq a \leq 5 \\ -3 \leq b \leq 4 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2 \leq a \leq 5 \\ 3 \geq -b \geq -4 \end{cases}$

donc $\begin{cases} 2 \leq a \leq 5 \\ -4 \leq -b \leq 3 \end{cases}$ donc $2+(-4) \leq a+(-b) \leq 5+3$

donc $-2 \leq a-b \leq 8$

Remarque : Pour le 1 on aurait pu utiliser directement le fait que la fonction affine $f(x) = \frac{1}{2}x+2$ est croissante donc conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$

ainsi, si $0 \leq x \leq y \leq 4$ alors $f(0) \leq f(x) \leq f(y) \leq f(4)$ etc.

EX 15 utilisation des variations pour encadrer.

1°

$3 < x < 5$

donc $1 < x-2 < 3 \quad \downarrow -2$

donc $1^2 < (x-2)^2 < 3^2$ — car la fonction carrée est croissante sur $[1,3]$

donc $1 < (x-2)^2 < 9$

donc $\frac{1}{1} > \frac{1}{(x-2)^2} > \frac{1}{9}$ — car la fonction inverse est décroissante sur $[1;9]$

donc $\frac{1}{9} < \frac{1}{(x-2)^2} < 1$

Remarque :
Il faut bien assimiler ce que signifie que :
→ une fonction croissante conserve l'ordre
→ une fonction décroissante renverse l'ordre.

2°

$0 \leq x \leq 3 \quad \downarrow +1$

donc $1 \leq x+1 \leq 4$

donc $\sqrt{1} \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{4}$ — car la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante sur $[1;4]$

donc $1 \leq \sqrt{x+1} \leq 2$

donc $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq \frac{1}{2}$ — car la fonction inverse est décroissante sur $[1;2]$

donc $4\times\frac{1}{2} \leq \frac{4}{\sqrt{x+1}} \leq 4 \quad \downarrow \times(-1)$

donc $-2 \geq -\frac{4}{\sqrt{x+1}} \geq -4 \quad \downarrow +1$

donc $1-2 \geq 1-\frac{4}{\sqrt{x+1}} \geq 1-4$

donc $-3 \leq 1-\frac{4}{\sqrt{x+1}} \leq -1$

donc $(-3)^2 \geq \left(1-\frac{4}{\sqrt{x+1}}\right)^2 \geq (-1)^2$

car la fonction carrée est décroissante sur $[-3;-1]$

donc $1 \leq \left(1-\frac{4}{\sqrt{x+1}}\right)^2 \leq 9$

EX16 : Lecture graphique

1°) $f(0) = 4$ 2°) $f(2) = 4$

3°) les antécédents de 2 par f (solutions de l'équation $f(x) = 2$) sont $\simeq -1{,}2$ et $3{,}2$

4°) les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -2 et 4.

5°) les solutions de $f(x) \leq 4$ sont les abscisses x telles que $x \in [0;2]$

6°)

x	-3		1		5
Variations de $f(x)$	$f(-3) \simeq -3{,}2$	↗	$f(1) = 4{,}5$	↘	$f(5) \simeq -3{,}2$

7°) le maximum de f est $4{,}5$.

7°)

x	-3		-2		4		5
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

EX 17 Exploitation d'un tableau de variations.

1°) -10 ; 5 et 12 sont des exemples de nombres dont les images par g sont positives.

2°)

x	-10		-6		1		12
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

EX18 Etudes de signes.

① signe de $-2x+3$

$-2x+3 \overset{?}{>} 0$

$-2x > -3$

$x < \frac{-3}{-2}$

$x < \frac{3}{2}$

réponse

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $-2x+3$		$+$	0	$-$	

② signe de x

$x \overset{?}{>} 0$

$x > 0$

R

une evidence

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$	

③ Signe de $(-x+1)(2x+5)$

signe de $-x+1$

$-x+1 \overset{?}{>} 0$

$-x > -1$

$x < 1$

R

signe de $2x+5$

$2x+5 \overset{?}{>} 0$

$2x > -5$

$x > \frac{-5}{2}$

R

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
signe de $-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(-x+1)(2x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad -2x^2 \leq 0$

et $-25 < 0$

donc $-2x^2 - 25 \leq -25 < 0$

Une somme de deux négatifs est négative.

$-2x^2 - 25 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Remarque : toujours prendre du recul et bien réfléchir avant de se lancer dans des calculs.

5) f est définie pour tout $x \neq -\frac{1}{3}$

car le dénominateur $(3x+1)^2 = 0$

lorsque $x = -\frac{1}{3}$

f se présente sous la forme d'un quotient avec $-1 < 0$

et $(3x+1)^2 > 0$ (pour $x \neq -\frac{1}{3}$)

donc sur $]-\infty ; -\frac{1}{3}[\cup]-\frac{1}{3} ; +\infty[$

$f(x) < 0$ (règle des signes d'un quotient).

6) $f(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x}{1} - \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}$

Pour $x \neq 0$

$= \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$

x apparaît au dénominateur ! penser à mettre sous forme d'un quotient.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Remarque : voir l'interprétation graphique dans l'ex 19 3°)

EX 19 : Résolution d'inéquations.

1) $-2x + 3 > 4x - 2$

$\Leftrightarrow -2x - 4x > -2 - 3$

$\Leftrightarrow -6x > -5$

$\Leftrightarrow x < \frac{-5}{-6}$

$\Leftrightarrow x < \frac{5}{6}$ $\qquad S =]-\infty ; \frac{5}{6}[$

2) $x^2 \leq x^3 \Leftrightarrow x^2 - x^3 \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2(1-x) \leq 0$

on étudie le signe de $x^2(1-x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de x^2		$+$	0	$+$		$+$	
Signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $x^2(1-x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

donc $x^2 \leq x^3 \Leftrightarrow x \in [1 ; +\infty[$

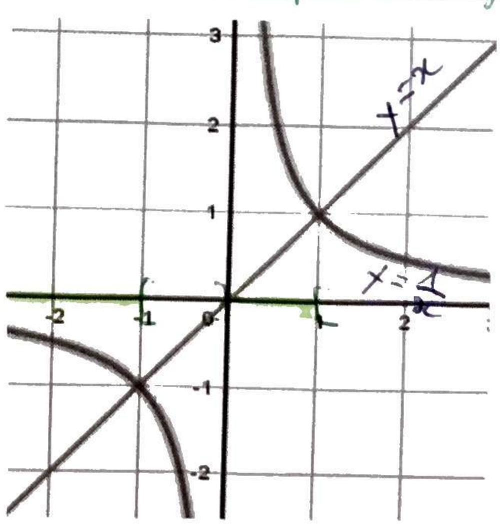
$\Updownarrow$

$x^2(1-x) \leq 0$

$x < \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1[\cup]0 ; 1[$

l'étude du signe de $x - \frac{1}{x}$ vient d'être faite dans le 6°) de l'ex 18

interprétation graphique :



la droite d'équation $y = x$ est en dessous de la courbe de la fonction inverse lorsque $x \in]-\infty ; -1[\cup]0, 1[$

EX 20 Second degré (Première)

1 $2x^2 - x - 3 = 0$

$2x^2 - x - 3$ est un trinôme du 2nd degré avec :

$a = 2 \quad b = -1 \quad c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4\times 2(\times -3) = 25 > 0$

donc cette équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 2}$ et $x_2 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 2}$

$x_1 = +\dfrac{1-5}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1+5}{4}$

$x_1 = -1$ et $x_2 = \dfrac{3}{2}$

$S = \left\{-1 ; \dfrac{3}{2}\right\}$

2 $3x^2 + 2 = 0$

$3x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $3x^2 + 2 \geq 2$

donc l'équation $3x^2 + 2 = 0$ n'a pas de solution

3 $-9x^2 + 6x = 1$

$\Leftrightarrow -9x^2 + 6x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -(9x^2 - 6x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow -((3x)^2 - 2\times 3x\times 1 + 1^2) = 0$

$\Leftrightarrow -(3x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

$S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

4 $4x + 2 = -3x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 2 = 0$

$3x^2 + 4x + 2$ est un trinôme du 2nd degré avec $a = 3$ $b = 4$ $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4^2 - 4\times 3\times 2$

$= 16 - 24 = -8 < 0$

Comme $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution.

$S = \emptyset$

Remarque : Dans les exemples ② et ③ ci-dessus on aurait pu utiliser le discriminant.
Cependant, il est important d'être capable de prendre du recul pour repérer les situations où le discriminant n'est pas indispensable.

EX 21 Second degré (Inéquations).

1o $-x^2 + x - 2 \overset{?}{>} 0$

$-x^2 + x - 2 = -1x^2 + 1x - 2$

$\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times(-2) = 1 - 8 = -7 < 0$

donc l'expression $-x^2 + x - 2$ est du signe de $a = -1$ donc négative pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ainsi, l'inéquation $-x^2 + x - 2 > 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

$S = \emptyset$

2o $9x^2 < 6x - 1$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 < 0$

$\Leftrightarrow (3x)^2 - 2\times 3x\times 1 + 1^2 < 0$

$\Leftrightarrow (3x-1)^2 < 0$

or un carré n'est jamais négatif.

$S = \emptyset$.

Remarque : En utilisant le discriminant on aurait trouvé $\Delta = 0$.

Suite EX 21.

3°) $\frac{2}{2x+1} \geqslant x+1 \iff \frac{2}{2x+1} - x - 1 \geqslant 0 \iff \frac{2}{2x+1} - \frac{x \times (2x+1)}{2x+1} - \frac{1 \times (2x+1)}{2x+1} \geqslant 0$

$$\iff \frac{2 - x(2x+1) - (2x+1)}{2x+1} \geqslant 0$$

$$\iff \frac{2 - 2x^2 - x - 2x - 1}{2x+1} \geqslant 0$$

$$\iff \frac{-2x^2 - 3x + 1}{2x+1} \geqslant 0$$

Etudions le signe de $-2x^2 - 3x + 1$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times 1$

$= 17 > 0$

donc l'expression $-2x^2 - 3x + 1$ est du signe de $a = -2$ donc négative partout sauf entre les racines x_1 et x_2

avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-(-3) - \sqrt{17}}{2 \times (-2)}$ $\qquad = \frac{-(-3) + \sqrt{17}}{2 \times (-2)}$

$= \frac{3 - \sqrt{17}}{-4}$ $\qquad = \frac{3 + \sqrt{17}}{-4}$

$\simeq 0{,}28$ $\qquad \simeq -1{,}78$

étudions le signe de $2x+1$

$2x + 1 \overset{?}{>} 0$

$2x > -1$

$x > -\frac{1}{2}$

R

On résume dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$x_2 \simeq -1{,}78$		$-\frac{1}{2}$		$x_1 \simeq 0{,}28$		$+\infty$
signe de $2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x^2-3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
signe de $\frac{-2x^2-3x+1}{2x+1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$\frac{2}{2x+1} \geqslant x+1 \iff \frac{-2x^2 - 3x + 1}{2x+1} \geqslant 0 \iff x \in]-\infty ; x_2] \cup]-\frac{1}{2} ; x_1]$

Ex22 (pas 20 erreur) Nombre dérivé et tangente.

1°) La Notion importante à intégrer :

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

ici on a :

2°) Equations des tangentes associées

$f(-2) = 3 \quad f'(-2) = -1$

$y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2)$

$y = -1(x+2) + 3$

$y = -x - 2 + 3$

$y = -x + 1$

$f(0) = 2 \quad f'(0) = \frac{1}{2}$

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = \frac{1}{2}x + 2$

$f(3) = 4 \quad f'(3) = 0$

$y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$y = 0(x-3) + 4$

$y = 4$.

tangente horizontale.

EX 23 (pas 21 erreur) Calcul de termes.

1) $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2 \\ u_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$

$\to u_1 = 3u_0 - 2$
$= 3 \times \frac{2}{3} - 2$
$= 2 - 2 = 0$

$\to u_2 = 3u_1 - 2$
$= 3 \times 0 - 2$
$= -2$

2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2u_n+4} \end{cases}$

$\to u_1 = \frac{1+u_0}{2u_0+4}$
$= \frac{1+1}{2\times1+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\to u_2 = \frac{1+u_1}{2u_1+4}$
$= \frac{1+\frac{1}{3}}{2\times\frac{1}{3}+4}$
$= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{14}{3}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

3) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -u_n + n \end{cases}$

$\to u_1 = -u_0 + 0$
$= -(-1) = 1$

$\to u_2 = -u_1 + 1$
$= -1 + 1 = 0$

4) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{4}{3} \end{cases}$

$\to u_1 = u_0 - \frac{4}{3}$
$= 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$\to u_2 = u_1 - \frac{4}{3}$
$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

5) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{4}{3} \times u_n \end{cases}$

$\to u_1 = -\frac{4}{3} \times u_0$
$= -\frac{4}{3} \times 2 = -\frac{8}{3}$

$\to u_2 = -\frac{4}{3} \times u_1$
$= -\frac{4}{3} \times \frac{8}{3}$
$= -\frac{32}{9}$

Ex 24 (pas 22 erreur) Variations d'une suite.

1°) $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) - 4 - (-3n-4)$
$= -3n - 3 - 4 + 3n + 4$
$= -3 < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc (u_n) décroissante (strictement)

2) $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n \times \left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)^n$
$= \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{3}{5} - 1\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^n \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^n > 0$ et $-\frac{2}{5} < 0$

donc $v_{n+1} - v_n < 0$ donc (v_n) décroissante. (strictement)

Suite EX24

3) $$w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)+1}{3+2(n+1)} - \frac{2n+1}{3+2n}$$

$$= \frac{2n+3}{2n+5} - \frac{2n+1}{3+2n}$$

$$= \frac{(2n+3)(3+2n)}{(2n+5)(3+2n)} - \frac{(2n+1)(2n+5)}{(2n+5)(3+2n)}$$

$$= \frac{\cancel{4n^2}+12n+9 - \cancel{4n^2}-10n-8n-5}{(2n+5)(3+2n)}$$

$$= \frac{4}{(2n+5)(3+2n)}$$ Or $4>0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2n+5>0$ et $3+2n>0$

ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $w_{n+1} - w_n > 0$ donc w_n croissante (strictement)

4) $$t_{n+1} - t_n = 2\times 3^{n+1} - 2\times 3^n$$

$$= 2\times 3^n \times 3 - 2\times 3^n$$

$$= 2\times 3^n (3-1)$$

$$= 4\times 3^n > 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc (t_n) strictement croissante.

5) $$z_{n+1} - z_n = 3(n+1)^2 + 2(n+1) - 1 - (3n^2+2n-1)$$

$$= \cancel{3n^2} + 6n + 1 + \cancel{2n} + 2 \cancel{-1} - \cancel{3n^2} - \cancel{2n} + 1$$

$$= 6n+4 > 0$$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc (z_n) strictement croissante.

6) $$a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{2}{n+1} - \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1 - \frac{2}{n+1} - 1 + \frac{2}{n} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

$$= \frac{2(n+1)}{n(n+1)} - \frac{2n}{n(n+1)} = \frac{2n+2-2n}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$$ >0 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

donc (a_n) est strictement croissante pour $n>0$