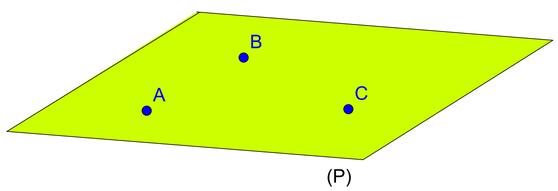
Vecteurs dans l'espace

1 Droites et plans

1.1 Définitions

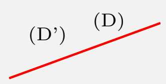
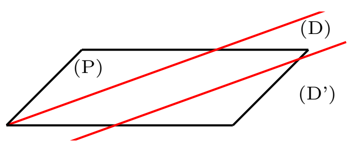
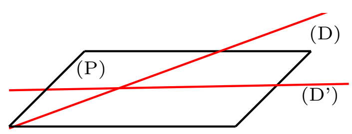
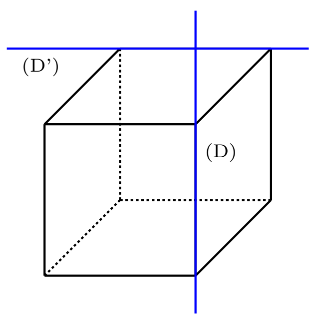
Définition 1 *:*

1. *Une droite est définie par* ***deux points distincts****.*
2. *Un plan est défini par* ***trois points non alignés ou deux droites sécantes****.*

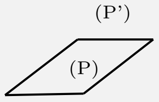
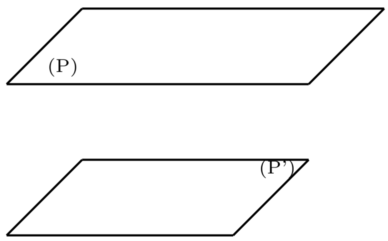
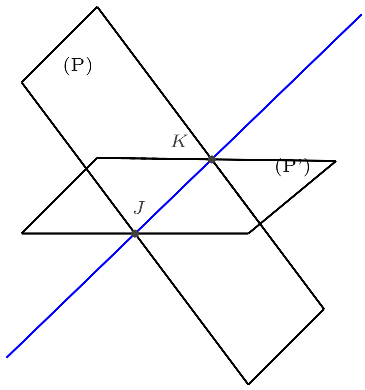


1.2 Position relative

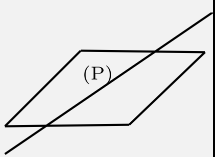
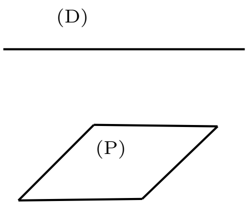
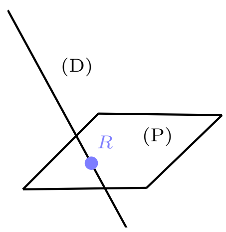
1.2.1 Deux droites

Confondues $(D) = (D')$	**Parallèles** **et COPLANAIRES** $(D)//(D')$	**Sécantes** **et COPLANAIRES**	**Non coplanaires**
			
Intersection : $(D) = (D')$	**Intersection vide**	**Intersection : un point**	**Intersection vide**

1.2.2 Deux plans

Confondus $(P) = (P')$	**Parallèles strictement** $(P)//(P')$	**Sécants suivant une droite**
		
Intersection : $(P) = (P')$	**Intersection vide**	**Intersection : une droite**

1.2.3 Droite et plan

Droite incluse $(D) \subset (P)$	**Parallèles strictement** $(D)//(P)$	**Sécants suivant un point**
		
Intersection : la droite	**Intersection vide**	**Intersection : un point**

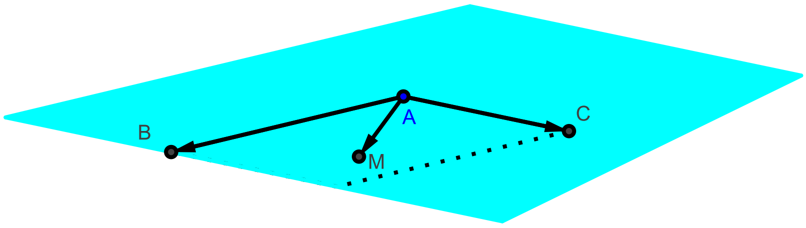
2 Vecteurs

- A 2 points A et B de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Si $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour *direction* celle de la droite (AB), pour *sens* celui de A vers B, pour *longueur ou norme* la distance AB. On note $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

La colinéarité se définit exactement comme dans le plan.
On a les mêmes propriétés sur le parallélisme de droites et l'alignement des points.

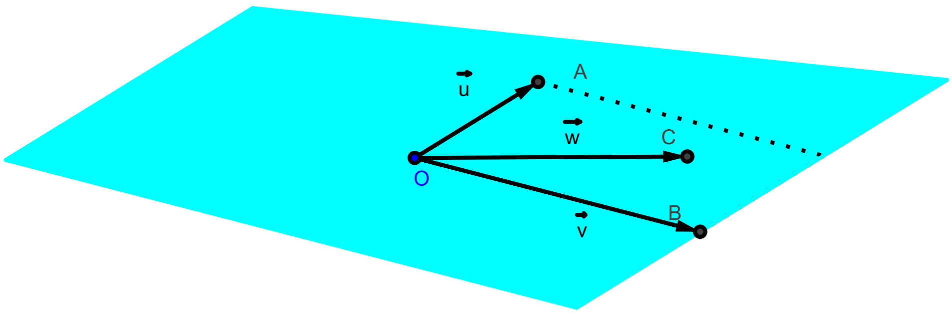
3 Vecteurs coplanaires

Théorème 1 : *Soient A, B et C trois points* ***non alignés****. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, x et y étant des réels quelconques.*



On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux ***vecteurs directeurs du plan (ABC).***
On dit aussi que $\overrightarrow{AM}$ est ***une combinaison linéaire (CL)*** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Définition 2 :
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
O, A, B et C sont quatre points tels que : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont ***coplanaires*** *si les points O, A, B et C le sont c'est-à-dire s'ils sont dans un même plan.*



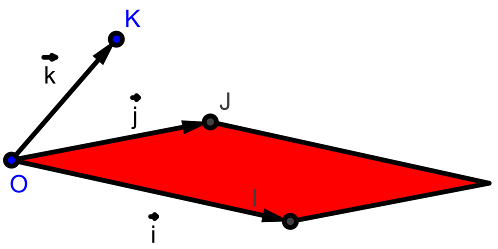
Théorème 2 : *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires. Alors $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$*

4 Repérage

4.1 Repères dans l'espace

Un repère est défini par un point O (l'origine du repère) et 3 vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ *non coplanaires.*

Le repère ainsi défini est noté $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$.



$(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ s'appelle une *base* des vecteurs de l'espace.

4.2 Coordonnées d'un point, d'un vecteur

Théorème 3 : *(admis)*

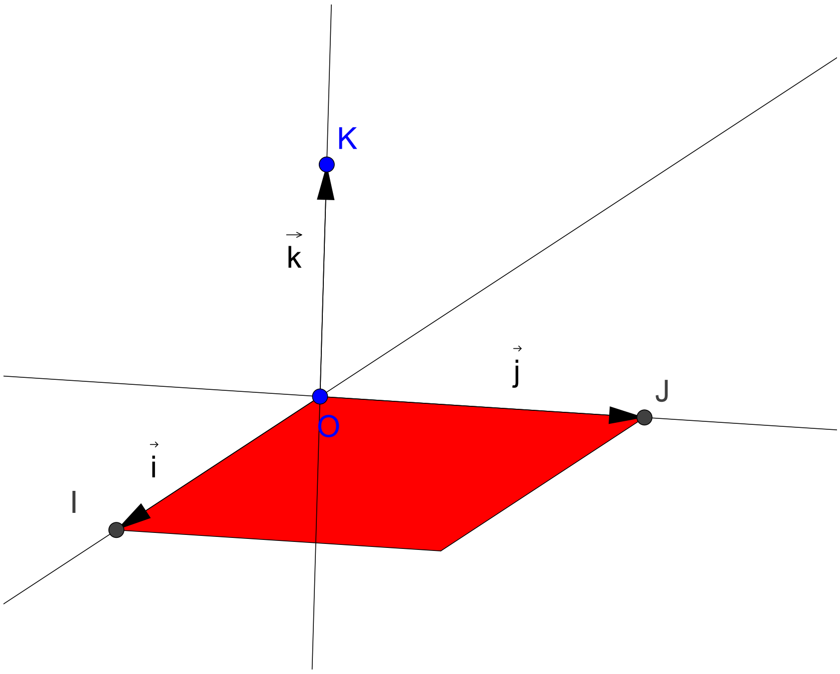
- *$(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$ est un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tels que :*

$$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

  Ce sont les ***coordonnées*** *de M.*
- *On note : $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$*
- *x s'appelle* ***l'abscisse*** *de M, y* ***l'ordonnée*** *et z la* ***côte*** *de M.*
- *Soit $\vec{u}$ un vecteur et M le point tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. alors les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont celles du point M.*
- *On note : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$*

5 Distances dans l'espace

5.1 Repère orthonormé (ou orthonormal)



Définition 3 *:*
*Un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$est **orthonormé** si les droites $(OI), (OJ)$ et (OK) sont deux à deux perpendiculaires et si $\|\vec{i}\,\| = \|\vec{j}\,\| = \|\vec{k}\,\| = 1$.*

5.2 Calculs avec les coordonnées

Tous les résultats de la géométrie plane s'étendent à l'espace en rajoutant la troisième coordonnée z.
ATTENTION!!! Dans l'espace, il n'y a pas de formule permettant de prouver que deux vecteurs sont colinéaires.

5.3 Norme d'un vecteur. Distance entre deux points

Théorème 4 *: (admis) Dans un repère orthonormé :*

- *Le vecteur* $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *a pour norme*

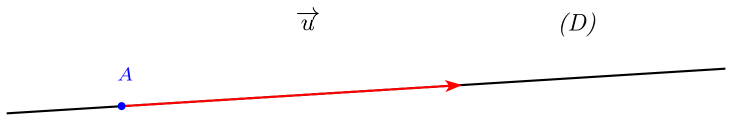
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- *Si* $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ *et si* $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ *alors :*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

6 Représentation paramétrique d'une droite

Théorème 5 *: (admis) Dans un repère :*

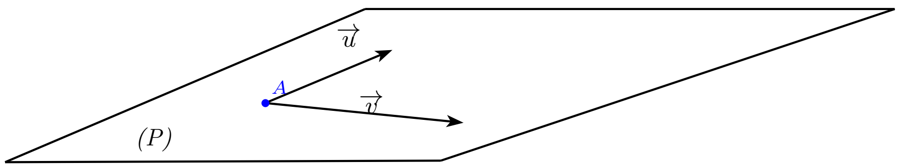


$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *et* $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (D) \iff \begin{cases} x = ak + x_A \\ y = bk + y_A \\ z = ck + z_A \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

7 Représentation paramétrique d'un plan.

Théorème 6 : *(admis) Dans un repère :*



$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ *et* $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (P) \iff \begin{cases} x = ak + a'k' + x_A \\ y = bk + b'k' + y_A \\ z = ck + c'k' + z_A \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$